

**Verzögerte Differentialgleichungen:  
Theorie, Numerik und Anwendungen**

Roland Pulch

Skript zur Vorlesung im Sommersemester 2024

Universität Greifswald

Institut für Mathematik und Informatik

15. Juli 2024

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Typen und Beispiele</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Existenz, Eindeutigkeit und Eigenschaften</b>	<b>9</b>
2.1	Einfache Differentialgleichung . . . . .	9
2.2	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	11
2.3	Positivität . . . . .	13
2.4	Halbfluss . . . . .	15
2.5	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Stabilität</b>	<b>22</b>
3.1	Stationäre Lösungen . . . . .	22
3.2	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	25
3.3	Skalare lineare Differentialgleichung . . . . .	28
3.4	Nichtlineare Differentialgleichungen . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Numerische Verfahren</b>	<b>35</b>
4.1	Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	35
4.2	Stetige Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	40
4.3	Verfahren für verzögerte Differentialgleichungen . . . . .	46
4.4	Verfahren bei verteilten Verzögerungen . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Anwendungen</b>	<b>64</b>
5.1	Populationsdynamik . . . . .	64
5.2	Verkehrsfluss . . . . .	72
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>80</b>

# 1 Typen und Beispiele

Ein autonomes System aus gewöhnlichen Dgln. besitzt die Form

$$y'(t) = f(y(t)) \quad (1.1)$$

mit der Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  (Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ ) und einer rechten Seite  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ). Ein Anfangswertproblem (AWP) entsteht durch die Vorgabe

$$y(t_0) = y_0 \quad (1.2)$$

mit  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig, dann ist die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des AWP's (1.1),(1.2) garantiert.

Bei einer *verzögerten Dgl.* (auch: *retardierte Dgl.*, engl.: *delay differential equation*) hängt die rechte Seite auch von der Lösung an einem oder mehreren früheren Zeitpunkten ab.

**Definition 1.1** *Eine verzögerte Dgl. oder ein System aus verzögerten Dgln. mit einer Verzögerung ist eine Dgl. der Form*

$$y'(t) = f(y(t), y(t - \tau)). \quad (1.3)$$

*Dabei ist die Verzögerung  $\tau > 0$  eine Konstante oder eine Funktion.*

Es sind folgende Fälle möglich:

- i)  $\tau$  ist eine Konstante,
- ii)  $\tau(t)$  ist eine Funktion der Zeit,
- iii)  $\tau(y(t))$  hängt von der Lösung ab,
- iv)  $\tau(t, y(t))$  hängt explizit von der Zeit und der Lösung ab.

O.E.d.A. seien im folgenden AWP's stets bei  $t_0 = 0$  vorgegeben. AWP's einer verzögerten Dgl. (1.3) mit konstantem  $\tau$  erfordern eine Vorgabe

$$y(t) = y_0(t) \quad \text{für } t \in [-\tau, 0] \quad (1.4)$$

mit einer stetigen Funktion  $y_0$ . Wird ein AWP einer verzögerten Dgl. (1.3) nur durch  $y(0) = y_0$  mit  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  beschrieben, dann ist gemeint, dass der Wert  $y_0$  konstant nach  $t < 0$  fortgesetzt wird.

**Beispiel 1.1** Sei  $N : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Populationsdichte. Die Dynamik der Population werde beschrieben durch

$$N'(t) = \underbrace{b N(t - \tau)}_{\text{Geburtenanteil}} - \underbrace{d N(t)}_{\text{Sterbeanteil}}$$

mit der Geburtenrate  $b > 0$  und der Sterberate  $d > 0$ . Die Verzögerung  $\tau > 0$  stellt z.B. eine Schwangerschaftszeit dar. Es liegt eine lineare verzögerte Dgl. vor.

**Beispiel 1.2** Sei  $N : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Populationsdichte. Die Dynamik der Population mit logistischem Wachstum wird modelliert über, siehe [7],

$$N'(t) = r N(t) \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right)$$

mit einer Wachstumsrate  $r > 0$ , einer Kapazität  $K > 0$  und einer Verzögerung  $\tau > 0$ . Hier liegt eine nichtlineare verzögerte Dgl. vor.

Betrachtet wird die Parameterwahl  $r = K = 1$  und der Anfangswert  $N(0) = 0.01$ . Abbildung 1 zeigt die Lösungen im Zeitbereich für drei verschiedene Verzögerungen  $\tau$ . In Abhängigkeit von  $\tau$  ergibt sich ein qualitativ unterschiedliches Lösungsverhalten. Es gibt einen Wert  $\tau_0$ , so dass für  $\tau \leq \tau_0$  Lösungen von AWPen gegen die Kapazität  $K$  konvergieren, während für  $\tau > \tau_0$  periodische Lösungen um  $K$  entstehen. In diesem Zusammenhang nennt man  $\tau_0$  einen *Bifurkationspunkt*.

**Pseudo-Phasenraum:** Zu Lösungen eines autonomen Systems aus Dgl. (1.1) können die Trajektorien  $\{y(t) : t \geq 0\}$  im Phasenraum  $\mathbb{R}^n$  dargestellt werden. Diese Darstellung ist im eindimensionalen Fall nicht sinnvoll. Bei eindimensionalen verzögerten Dgl. kann bereits komplexes Lösungsverhalten entstehen. Daher verwendet man eine Darstellung im sogenannten *Pseudo-Phasenraum* mit Trajektorien  $\{(y(t), y(t - \tau)) : t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ . Statt  $t - \tau$  könnte auch  $t - c$  mit anderem  $c > 0$  gesetzt werden und die Darstellung bleibt qualitativ gleich. Im Pseudo-Phasenraum kann die Konvergenz gegen stationäre Punkte beobachtet werden. Periodische Lösungen führen wieder auf geschlossene Kurven. Zu Beispiel 1.2 zeigt Abbildung 2 die Lösungen aus Abbildung 1 mit den verschiedenen Verzögerungen im Pseudo-Phasenraum.

Epidemiologische Modelle bestehen häufig aus gewöhnlichen Dgl. oder verzögerten Dgl., siehe [5]. Einfache Modelle beinhalten drei Populationen: Suszeptible (S), Infektiöse (I) und Resistente (R). Ein einfaches *SIR-Modell* besteht aus dem System gew. Dgl.

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t)I(t) \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ R'(t) &= \gamma I(t) \end{aligned} \tag{1.5}$$

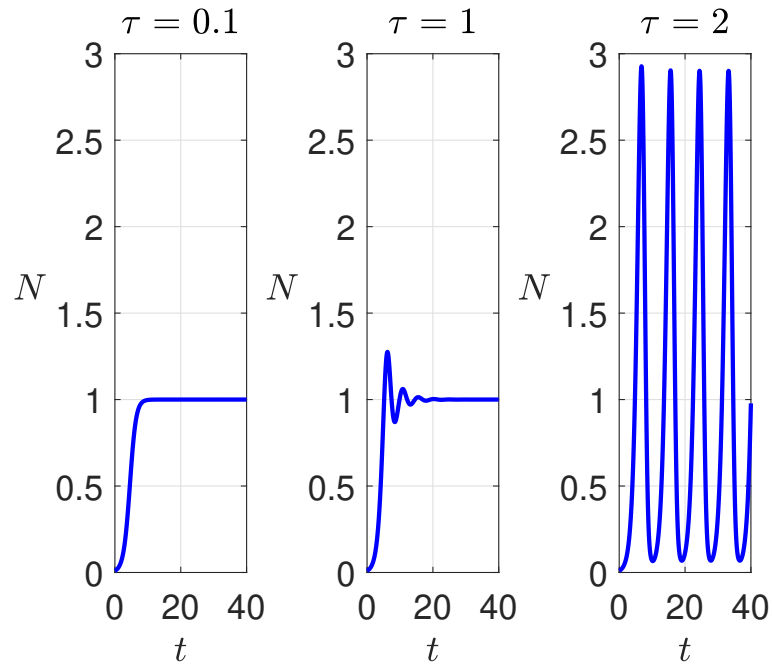


Abbildung 1: Lösungen der Populationsdynamik mit logistischem Wachstum im Zeitbereich für verschiedene Verzögerungen.

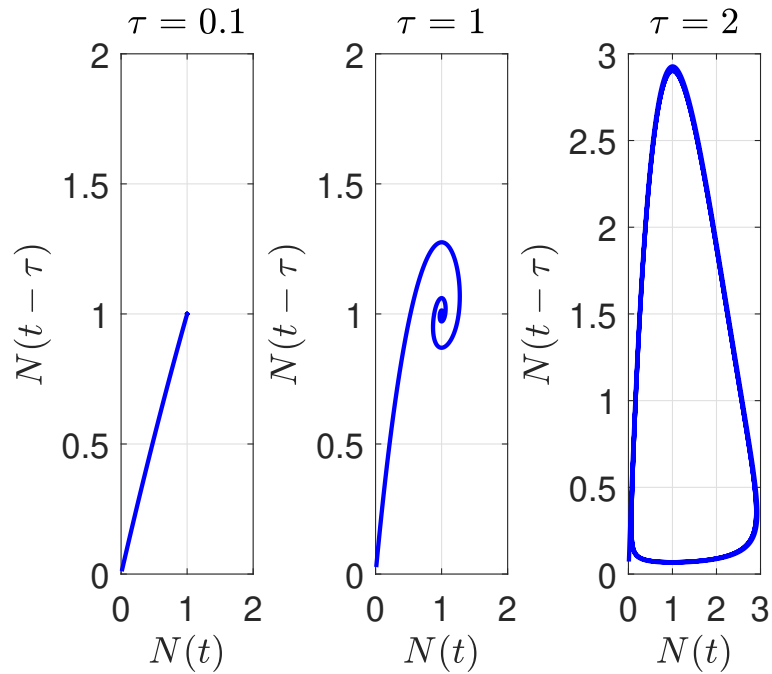


Abbildung 2: Trajektorien der Lösungen zur Populationsdynamik mit logistischem Wachstum im Pseudo-Phasenraum für verschiedene Verzögerungen.

mit Ansteckungsrate  $\beta > 0$  und Genesungsrate  $\gamma > 0$ . Es ist hier  $S(t) + I(t) + R(t)$  konstant für alle  $t \geq 0$ . Die Gesamtpopulation bleibt also gleich. O.E.d.A. kann  $S(0) + I(0) + R(0) = 1$  gesetzt werden, d.h. es wird von Populationsdichten ausgegangen. Diese Eigenschaft wird sich auch in den folgenden SIR-Modellen finden.

**Beispiel 1.3** Ein SIR-Modell mit einer verzögerter Ansteckung mit einer Krankheit ist gegeben durch das System verzögerter Dgl.

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t - \tau)I(t - \tau) \\ I'(t) &= \beta S(t - \tau)I(t - \tau) - \gamma I(t) \\ R'(t) &= \gamma I(t) \end{aligned} \tag{1.6}$$

mit Konstanten  $\beta, \gamma > 0$  und einer Verzögerung  $\tau > 0$ .

Ein SIR-Modell mit temporärer Immunität ist gegeben durch das System gew. Dgl.

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t)I(t) + \theta R(t) \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ R'(t) &= \gamma I(t) - \theta R(t) \end{aligned} \tag{1.7}$$

mit Konstanten  $\beta, \gamma, \theta > 0$ . Lösungen von AWPen des Systems (1.7) konvergieren gegen stationäre Punkte.

**Beispiel 1.4** Ein SIR-Modell mit temporärer Immunität bei einem verzögerten Verlust der Immunität lautet

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t)I(t) + \gamma I(t - \tau) \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ R'(t) &= \gamma I(t) - \gamma I(t - \tau) \end{aligned} \tag{1.8}$$

mit Konstanten  $\beta, \gamma > 0$  und Verzögerung  $\tau > 0$ . Für kleine Verzögerungen konvergieren die Lösungen von AWPen gegen stationäre Punkte. Für große Verzögerungen nähern sich die Lösungen von AWPen periodischen Lösungen an.

**Definition 1.2** Eine verzögerte Dgl. oder ein System aus verzögerten Dgl. mit mehreren (paarweise verschiedenen) Verzögerungen besitzt die Form

$$y'(t) = f(y(t), y(t - \tau_1), y(t - \tau_2), \dots, y(t - \tau_m)) \tag{1.9}$$

mit  $\tau_1, \dots, \tau_m > 0$ . O.E.d.A. kann  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$  vorausgesetzt werden.

AWPe zur Dgl. (1.9) erfordern eine Vorgabe (1.4) mit  $\tau = \max\{\tau_1, \dots, \tau_m\} = \tau_m$ .

**Beispiel 1.5** Ein Kombination der Effekte aus Beispiel 1.3 und Beispiel 1.4 ergibt ein SIR-Modell der Gestalt

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t - \tau_1)I(t - \tau_1) + \gamma I(t - \tau_2) \\ I'(t) &= \beta S(t - \tau_1)I(t - \tau_1) - \gamma I(t) \\ R'(t) &= \gamma I(t) - \gamma I(t - \tau_2) \end{aligned} \quad (1.10)$$

mit Konstanten  $\beta, \gamma > 0$  und Verzögerungen  $\tau_1, \tau_2 > 0$ .

**Definition 1.3** Eine Dgl. oder ein System aus Dgln. mit verteilter Verzögerung besitzt die Form

$$y'(t) = f\left(y(t), \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} y(t - \tau)g(\tau) d\tau\right) \quad (1.11)$$

mit einer Dichtefunktion  $g$  und  $0 \leq \tau_{\min} < \tau_{\max} \leq \infty$ .

Bei einem System aus Dgln. ist das Integral in (1.11) komponentenweise für  $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$  mit der Dichtefunktion  $g$  zu bilden. Der Integrationsbereich ist entweder ein kompaktes Intervall  $\mathcal{T} = [\tau_{\min}, \tau_{\max}]$  oder der unbeschränkte Bereich  $\mathcal{T} = [\tau_{\min}, \infty)$ . Die integrable Funktion  $g : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$  muss die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichte besitzen:

i) Nichtnegativität:  $g(\tau) \geq 0$  für alle  $\tau \in \mathcal{T}$ ,

ii) Normierung:  $\int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} g(\tau) d\tau = 1$ .

Als Kennzahl einer Wahrscheinlichkeitsverteilung wird der Erwartungswert (Pittelwert) betrachtet

$$\bar{\tau} = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \tau g(\tau) d\tau. \quad (1.12)$$

Beispiele sind die Gleichverteilung oder Beta-Verteilung auf einem kompakten Intervall  $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$  und die Exponentialverteilung oder Gamma-Verteilung auf  $[0, \infty)$ . AWPe zu einer Dgl. (1.11) erfordern die Vorgabe von  $y(t)$  für  $-t \in \mathcal{T}$ .

**Beispiel 1.6** Ein SIR-Modell mit temporärer Immunität und einer verteilten Verzögerung ist

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t)I(t) + \gamma \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} I(t - \tau)g(\tau) d\tau \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ R'(t) &= \gamma I(t) - \gamma \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} I(t - \tau)g(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.13)$$

mit Konstanten  $\beta, \gamma > 0$  und Dichtefunktion  $g$ .

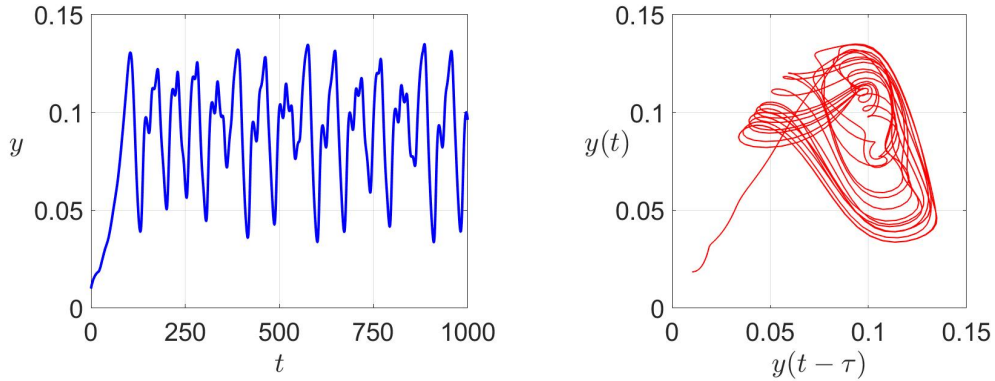


Abbildung 3: Lösungen eines AWP des Mackey-Glass-Modells (1.14) im Zeitbereich (links) und im Pseudo-Phasenraum (rechts).

In [14] wurde Beispiel 1.4 mit einer Verzögerung  $\bar{\tau}$  gemäß (1.12) und Beispiel 1.6 mit verteilter Verzögerung verglichen. Das Lösungsverhalten ist qualitativ identisch und quantitativ ähnlich.

**Beispiel 1.7** Mackey und Glass [10] entwickelten Modelle für die Konzentration von Zellen in zirkulierendem Blut innerhalb eines Einheitsvolumens. Eines dieser Modelle ist eine verzögerte Dgl. für die Blutzellenpopulation der Form, siehe [15],

$$y'(t) = \frac{\lambda a^m y(t - \tau)}{a^m + y(t - \tau)^m} - g y(t) \quad (1.14)$$

mit positiven Konstanten  $\lambda, a, g, m$  und Verzögerung  $\tau$ . Abbildung 3 zeigt die Lösung eines AWP mit  $y(0) = 0.01$  und den Parametern  $\lambda = 0.2, a = 0.1, b = 0.1, m = 10$  sowie Verzögerung  $\tau = 20$ . Wir erkennen hier ein chaotisches Verhalten der Lösung. Bei gewöhnlichen Dgl. kann ein solches Verhalten erst für Systemen ab Dimension  $n = 3$  entstehen.

**Definition 1.4** *Eine neutrale verzögerte Dgl. oder ein System aus neutralen verzögerten Dgl. ist eine Dgl., bei der die rechte Seite auch von Ableitungen der Lösung an früheren Zeitpunkten abhängt.*

Eine einfache Form von neutralen verzögerten Dgl. mit einer Verzögerung lautet

$$y'(t) = f(y(t), y(t - \tau), y'(t - \tau)). \quad (1.15)$$

Ein Anwendungsbeispiel der Gestalt (1.15) findet sich in [16]. Neutrale verzögerte Dgl. werden in dieser Veranstaltung nicht betrachtet.



## 2 Existenz, Eindeutigkeit und Eigenschaften

In diesem Kapitel befassen wir uns mit der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu verzögerten Dgl. sowie deren Eigenschaften.

### 2.1 Einfache Differentialgleichung

Wir diskutieren die lineare verzögerte Dgl.

$$y'(t) = \mu y(t - \tau) \quad (2.1)$$

mit Parameter  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und Verzögerung  $\tau > 0$ . Im Fall  $\tau = 0$  erhalten wir die lineare gewöhnliche Dgl.  $y' = \mu y$  mit den Lösungen  $y(t) = Ce^{\mu t}$  für Konstanten  $C \in \mathbb{R}$ . Dies sind steigende oder fallende Exponentialfunktionen je nach Vorzeichen von  $\mu$ .

Demgegenüber untersuchen wir die mögliche Existenz von periodischen Lösungen der Dgl. (2.1). Wir machen als Ansatz eine harmonische Schwingung

$$y(t) = A \sin(\omega t)$$

mit  $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $\omega > 0$ . Einsetzen in (2.1) liefert mit einem Additionstheorem

$$\begin{aligned} A\omega \cos(\omega t) &= \mu A \sin(\omega(t - \tau)) \\ &= \mu A [\sin(\omega t) \cos(\omega \tau) - \cos(\omega t) \sin(\omega \tau)]. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Terme zeigt als Bedingungen

$$\cos(\omega \tau) = 0 \quad \text{und} \quad \omega = -\mu \sin(\omega \tau).$$

Die erste Bedingung erfordert  $\omega \tau = \frac{\pi}{2}$  oder  $\omega \tau = \frac{3\pi}{2}$ . Mit der zweiten Bedingung folgt dann

$$\begin{aligned} i) \quad \omega \tau &= \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \mu \tau = -\frac{\pi}{2}, \\ ii) \quad \omega \tau &= \frac{3\pi}{2} \quad \text{und} \quad \mu \tau = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Notwendigerweise ist damit  $\omega, \mu, \tau \neq 0$ . Es ist  $A$  beliebig. Jedoch muss  $\tau$  in Abhängigkeit von  $\mu$  gewählt werden oder umgekehrt. Sei  $\tau$  vorgegeben.

Im Fall (i) folgt  $\mu = -\frac{\pi}{2\tau} < 0$  und  $\omega = \frac{\pi}{2\tau}$ . Die Periode  $T = 4\tau$  der Lösung hängt somit von der Verzögerung ab.

Im Fall (ii) folgt  $\mu = \frac{3\pi}{2\tau} > 0$  und  $\omega = \frac{3\pi}{2\tau}$ . Die Periode ergibt sich zu  $T = \frac{4}{3}\tau$ .

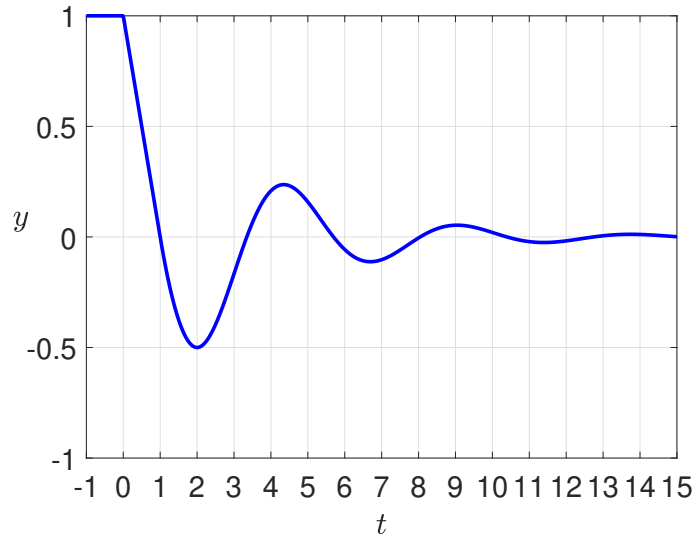


Abbildung 4: Lösung des AWP's zur verzögerten Dgl. (2.1).

Nun betrachten wir die Dgl. (2.1) mit  $\mu = -1$  und  $\tau = 1$  sowie den Anfangswerten  $y(t) = 1$  für  $t \in [-1, 0]$ . Wir lösen dieses AWP mit der *Schritte-Methode*. Im Intervall  $[0, 1]$  erhalten wir

$$y'(t) = -y(t-1) = -1.$$

Dies ist eine gewöhnliche Dgl. Mit der Anfangsbedingung folgt als Lösung

$$y(t) = y(0) + \int_0^t -1 \, ds = 1 - t \quad \text{für } t \in [0, 1].$$

Im Intervall  $[1, 2]$  ergibt sich die gewöhnliche Dgl.

$$y'(t) = -y(t-1) = -(1 - (t-1)) = t - 2.$$

Mit dem Anfangswert  $y(1) = 0$  folgt

$$y(t) = y(1) + \int_1^t -(s-2) \, ds = \frac{3}{2} - 2t + \frac{1}{2}t^2 \quad \text{für } t \in [1, 2].$$

Das Verfahren wird auf den Intervallen  $[n-1, n]$  für  $n = 3, 4, \dots$  fortgesetzt. Induktiv folgt

$$y(t) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{(t - (k-1))^k}{k!} \quad \text{für } t \in [n-1, n]$$

und  $n \geq 1$ . Im  $n$ -ten Intervall liegt ein Polynom vom Grad  $n$  vor. Abbildung 4 zeigt diese Lösung.

Die Lösung ist insgesamt stetig, jedoch nicht stetig differenzierbar bei  $t = 0$ . Eine genauere Untersuchung zeigt eine Unstetigkeit in der  $n$ -ten Ableitung

$$\lim_{t \rightarrow (n-1)^-} y^{(n)}(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow (n-1)^+} y^{(n)}(t) = (-1)^n.$$

Die Lösung  $y$  ist  $n$ -mal stetig differenzierbar auf  $(n-1, \infty)$  für  $n \geq 0$ . Die Glattheit nimmt daher mit der Zeit zu.

## 2.2 Existenz und Eindeutigkeit

Wir betrachten ein autonomes System aus verzögerten Dgln. (1.3) mit einer Verzögerung. Die rechte Seite besitzt die Form  $f : D \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $D, E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Es sei  $f$  stetig differenzierbar auf  $D$  und stetig auf  $E$ . Ein AWP wird vorgegeben durch (1.4).

**Definition 2.1** *Eine Funktion  $y : [-\tau, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $0 < T \leq \infty$  heißt Lösung eines AWP (1.3), (1.4) bei einem System mit einer konstanten Verzögerung  $\tau > 0$  und stetigen Anfangswerten, wenn*

- i)  $y$  erfüllt die Dgl. für  $t > 0$ ,
- ii)  $y(t) = y_0(t)$  für  $t \in [-\tau, 0]$ ,
- iii)  $y$  ist stetig auf  $[-\tau, T)$ ,
- iv)  $y$  ist stetig differenzierbar auf  $(0, T)$  und der rechtsseitige Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow 0^+} y'(t)$  existiert.

Wir lösen das AWP (1.3), (1.4) mit der *Schritte-Methode*. Dieses Verfahren wird üblicherweise mit der Folge von Intervallen  $[j\tau, (j+1)\tau]$  für  $j = 0, 1, 2, \dots$  durchgeführt. Bei gewöhnlichen Dgln. wird die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen auf offenen maximalen Intervallen erhalten, siehe Satz 3.6 in [8]. Daher verwenden wir die Folge  $[j\frac{\tau}{2}, (j+1)\frac{\tau}{2}]$  für  $j = 0, 1, 2, \dots$

Sei ein  $\varepsilon \in (0, \frac{\tau}{4})$  gegeben. Die Anfangswerte (1.4) beschreiben wir durch eine stetige Funktion  $\phi : [-\tau - \varepsilon, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\phi(t) = \begin{cases} y_0(t) & \text{für } -\tau \leq t \leq 0, \\ y_0(-\tau) & \text{für } t < -\tau. \end{cases} \quad (2.2)$$

Hier liegt eine stetige Fortsetzung auf  $t < -\tau$  vor. Es entsteht ein nichtautonomes System aus gewöhnlichen Dgln.

$$y'(t) = \tilde{f}(t, y(t)) = f(y(t), \phi(t - \tau)) \quad (2.3)$$

Tabelle 1: Vorgehen in Schritte-Methode.

Intervall	Def.bereich $\tilde{f}$	verwendete frühere Werte
$[0, \frac{\tau}{2}]$	$(-\varepsilon, \tau)$	$\phi$ auf $(-\tau - \varepsilon, 0)$
$[\frac{\tau}{2}, \tau]$	$(\frac{\tau}{2} - \varepsilon, \frac{3}{2}\tau)$	$\phi$ auf $(-\frac{\tau}{2} - \varepsilon, 0]$ , $y$ auf $(0, \frac{\tau}{2})$
$[\tau, \frac{3}{2}\tau]$	$(\tau - \varepsilon, 2\tau)$	$\phi$ auf $(-\varepsilon, 0]$ , $y$ auf $(0, \tau)$
$[\frac{3}{2}\tau, 2\tau]$	$(\frac{3}{2}\tau - \varepsilon, \frac{5}{2}\tau)$	$y$ auf $(\frac{\tau}{2} - \varepsilon, \frac{3}{2}\tau)$
...	...	...

mit  $\tilde{f} : (-\varepsilon, \tau) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Es ist  $\tilde{f}$  stetig in  $t$  und stetig differenzierbar in  $y$ . Als Anfangsbedingung folgt  $y(0) = \phi(0)$ . Die Theorie über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu gewöhnlichen Dgln. ergibt eine eindeutige Lösung von (2.3) mit maximalem Existenzintervall, d.h. von der Form  $y : (-\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $0 < \alpha \leq \varepsilon$  und  $0 < \beta \leq \tau$ .

Gilt  $\beta \leq \frac{\tau}{2}$ , dann ist eine eindeutige Lösung  $y$  des AWP's (1.3),(1.4) auf dem (kleinen) Intervall  $[0, \beta)$  gefunden, welche nicht für  $t > \beta$  fortgesetzt werden kann. Gilt  $\beta > \frac{\tau}{2}$ , dann wird die Methode auf dem Intervall  $[\frac{\tau}{2}, \tau]$  weitergeführt mit den Anfangswerten  $\phi(t) = y_0(t)$ , wobei eine Fortsetzung wie in (2.2) nicht mehr notwendig ist. Für das Intervall  $[\tau, \frac{3}{2}\tau]$  wird dann  $\phi : [-\varepsilon, \frac{\tau}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf die bereits erhaltene Lösung  $y$  gesetzt, usw. Tabelle 1 zeigt die enthaltenen Abhängigkeiten.

Die Schritte-Methode wird rekursiv auf den Intervallen durchgeführt solange die zugehörigen gewöhnlichen Dgln. noch Lösungen über die gesamten Intervalle besitzen. Bricht diese Folge nie ab, dann existiert die Lösung für alle  $t \geq 0$ . Wir finden somit eine Lösung  $y : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$  des AWP's (1.3),(1.4) auf einen maximalen Intervall ( $T < \infty$  oder  $T = \infty$ ). Der nachfolgende Satz fasst das Ergebnis zusammen.

**Satz 2.1** *Gegeben sei das AWP (1.3),(1.4) eines Dgl.-Systems mit einer Verzögerung. Die rechte Seite  $f : D \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit offenen Mengen  $D, E \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $D \subseteq E$  sei stetig differenzierbar auf  $D$  und stetig auf  $E$ . Dann gibt es ein maximales  $T$  mit  $0 < T \leq \infty$  und eine zugehörige eindeutige Lösung  $y : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

**Bemerkung 2.1** Bei einem System aus Dgln. (1.9) mit mehreren Verzögerungen, siehe Def. 1.2, gilt unter entsprechenden Voraussetzungen die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung analog. Die Schritte-Methode wird dann angewendet mittels Intervallen der Breite  $\frac{\tau}{2}$  mit  $\tau = \min\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$ .

**Bemerkung 2.2** Bei einer Dgl. (1.11) mit verteilter Verzögerung, siehe Def. 1.3, kann die Schritte-Methode angewendet werden, falls  $\tau_{\min} > 0$  gilt. Jedoch kann die Schritte-Methode im Fall  $\tau_{\min} = 0$  nicht eingesetzt werden.

In Satz 2.1 ist der Fall  $T < \infty$  möglich. Der folgende Satz beinhaltet eine hinreichende (aber keineswegs notwendige) Bedingung dafür, dass die Lösung für alle  $t \geq 0$  existiert ( $T = \infty$ ).

**Satz 2.2** *Gegeben sei ein AWP eines Systems (1.9) mit konstanten Verzögerungen  $\tau_1 < \dots < \tau_m$ . Die rechte Seite  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  erfülle die Voraussetzungen aus Satz 2.1 und die Bedingung*

$$\|f(y, z_1, \dots, z_m)\| \leq \bar{c} + c_0\|y\| + \sum_{i=1}^m c_i\|z_i\| \quad (2.4)$$

für alle  $y, z_1, \dots, z_m \in \mathbb{R}^n$  mit Konstanten  $\bar{c}, c_0, c_1, \dots, c_m \geq 0$  und einer beliebigen Vektornorm. Dann existiert eine eindeutige Lösung  $y : [-\tau_m, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Beweis:

In der Schritte-Methode entsteht eine nichtautonome gewöhnliche Dgl.

$$y'(t) = \tilde{f}(t, y(t)) = f(y(t), \phi(t - \tau_1), \dots, \phi(t - \tau_m))$$

mit  $f : (-\varepsilon, \tau_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Durch die Bedingung aus dem Satz können wir abschätzen

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(t, y)\| &= \|f(y, \phi(t - \tau_1), \dots, \phi(t - \tau_m))\| \\ &\leq \bar{c} + c_0\|y\| + \sum_{i=1}^m c_i\|\phi(t - \tau_i)\| \\ &\leq \left( \bar{c} + \sum_{i=1}^m c_i \max_{t \in [-\varepsilon, \tau_1]} \|\phi(t - \tau_i)\| \right) + c_0\|y\| \end{aligned}$$

für alle  $t \in (-\varepsilon, \tau_1)$  und alle  $y \in \mathbb{R}^n$ . Die Maxima existieren, da die Funktionen jeweils stetig auf dem kompakten Intervall sind. Dadurch ist die Nicht-Explosionsbedingung für gewöhnliche Dgln. erfüllt und die Lösung  $y$  existiert in ganz  $(-\varepsilon, \tau)$ . Analog gilt dies in den weiteren Intervallen der Schritte-Methode. Die Folge bricht also nie ab.  $\square$

## 2.3 Positivität

In vielen Modellen aus der Populationsdynamik, der chemischen Reaktionskinetik, der Epidemiologie und anderen Anwendungen haben die Unbekannten die Bedeutung von nichtnegativen Größen (z.B. Anzahlen, Konzentrationen). Daher sind wir an Kriterien interessiert, wann die Lösungen einer verzögerten Dgl. nichtnegative Lösungen besitzt. Es bezeichnet  $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ .

**Satz 2.3** Die Funktion  $f : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  erfülle die Forderungen aus Satz 2.1. Gilt die Bedingung

$$y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad f_i(y, z) \geq 0$$

für  $i = 1, \dots, n$  und alle  $y, z \in \mathbb{R}_+^n$  sowie  $y_0(t) \in \mathbb{R}_+^n$  für  $t \in [-\tau, 0]$ , dann gilt bei der Lösung des AWP's (1.3), (1.4) auch  $y(t) \in \mathbb{R}_+^n$  für alle  $t \geq 0$ .

Beweis: siehe [20], S. 28.

**Bemerkung 2.3** Satz 2.3 gilt analog für autonome Systeme aus gewöhnlichen Dgl. (1.1), da der Fall  $f(y, z) = f(y)$  betrachtet werden kann.

**Beispiel 2.1** Wir wenden Satz 2.3 auf Beispiel 1.1 ( $n = 1$ ) an. Mit  $y(t) = N(t)$  und  $z(t) = N(t - \tau)$  gilt  $f = bz - dy$ . Wir erhalten

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad f = bz \geq 0$$

für alle  $z \geq 0$  wegen  $b > 0$ . Somit ist die Positivität gegeben.

**Beispiel 2.2** Wir wenden Satz 2.3 auf Beispiel 1.2 ( $n = 1$ ) an. Mit  $y = N(t)$  und  $z = N(t - \tau)$  gilt  $f = ry(1 - \frac{z}{K})$ . Wir erhalten

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

für beliebiges  $z$ . Somit ist die Positivität gegeben.

**Beispiel 2.3** Es bezeichnen  $M$  die Konzentration einer mRNA und  $P$  die Konzentration eines Proteins. Ein einfaches Modell für die chemischen Reaktionen mit diesen Stoffen ist

$$\begin{aligned} M'(t) &= \alpha_M \frac{1}{1 + (P(t - \tau)/P_0)^{n_H}} - \mu_M M(t) \\ P'(t) &= \alpha_P M(t) - \mu_P P(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

mit Konstanten  $\alpha_M, \alpha_P, \mu_M, \mu_P > 0$ , einem Schwellenwert  $P_0 > 0$ , dem Hill-Koeffizienten  $n_H \geq 1$  und einer Verzögerungen  $\tau > 0$ .

Wir wenden Satz 2.3 auf das System (2.5) an. Mit  $y = (P(t), P(t))^\top$  und  $z = (P(t - \tau), P(t - \tau))^\top$  gilt

$$\begin{aligned} f_1(y, z) &= \alpha_M \frac{1}{1 + (z_2/P_0)^n} - \mu_M y_1 \\ f_2(y, z) &= \alpha_P y_1 - \mu_P y_2. \end{aligned}$$

Es folgt

$$y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1(y, z) = \alpha_M \frac{1}{1 + (z_2/P_0)^n} \geq 0$$

$$y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f_2(x, y) = \alpha_P y_1 \geq 0$$

für alle  $y_1, y_2, z_1, z_2 \geq 0$ . Wieder ist die Positivität garantiert.

Leider lässt sich Satz 2.3 nicht bei den SIR-Modellen mit Verzögerung anwenden.

**Beispiel 2.4** Wir betrachten das SIR-Modell aus Beispiel 1.4. Die rechte Seite lässt sich schreiben als

$$f_1(y, z) = -\beta y_1 y_2 + \gamma z_2$$

$$f_2(y, z) = \beta y_1 y_2 - \gamma y_2$$

$$f_3(y, z) = \gamma y_2 - \gamma z_2 = \gamma(y_2 - z_2).$$

Die ersten beiden Komponenten erfüllen die geforderte Bedingung. Die dritte Komponente ist unabhängig von  $y_3$ . Es tritt  $f_3 < 0$  auch für  $y_2, z_2 \geq 0$  auf.

## 2.4 Halbfluss

Wir definieren einen allgemeinen Begriff in Zusammenhang mit dynamischen Systemen.

**Definition 2.2** *Es sei  $X$  eine nichtleere Teilmenge eines metrischen Raums. Ein Halbfluss in  $X$  ist eine Familie von Abbildungen  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  mit  $\varphi_t : X \rightarrow X$ , so dass die beiden Bedingungen erfüllt sind:*

- i) *Identitätseigenschaft:*  $\varphi_0(x) = x$  für alle  $x \in X$ ,
- ii) *Halbgruppeneigenschaft:*  $\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x)$  für alle  $x \in X$  und  $t, s \geq 0$ .

**Bemerkung 2.4** Ein Fluss ist eine Familie von Abbildungen  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  mit analogen Eigenschaften.

Die Halbgruppeneigenschaft bewirkt auch eine Kommutativität bei der Verkettung der Abbildungen

$$\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x) = \varphi_{s+t}(x) = \varphi_s(\varphi_t(x)) \quad \text{für } x \in X, t, s \geq 0.$$

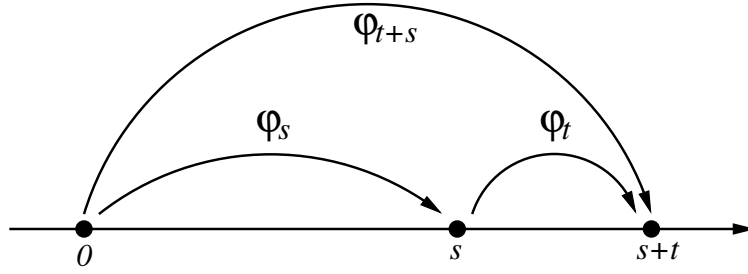


Abbildung 5: Halbfluss bei gewöhnlichen Dgln.

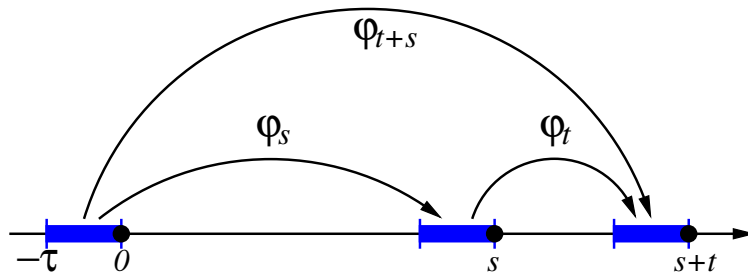


Abbildung 6: Halbfluss bei verzögerten Dgln. mit einer Verzögerung  $\tau$ .

Wir betrachten das autonome System (1.1) aus gewöhnlichen Dgln. mit lokal Lipschitz-stetiger rechter Seite  $f : D \rightarrow D$  und einer Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Es sei vorausgesetzt, dass die Lösung eines AWP's  $y(0) = y_0 \in D$  für alle  $t \geq 0$  existiert. Wir setzen  $\varphi_t(y_0) = y(t; y_0)$  für  $y_0 \in D$ . Dann ist  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  ein Halbfluss, da die Eigenschaften auf Definition 2.2 erfüllt sind. Hier gilt  $X = D \subseteq \mathbb{R}^n$  und als Metrik dient z.B.  $d(x, \tilde{x}) = \|x - \tilde{x}\|_2$ . Abbildung 5 veranschaulicht die Operation des Halbflusses.

Nun betrachten wir ein System verzögerter Dgln. (1.9) mit mehreren konstanten Verzögerungen  $\tau_1 < \dots < \tau_m$ . Die rechte Seite sei  $f : D \times D \times \dots \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit einer Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  und erfülle die Voraussetzungen aus Satz 2.1. Die Anfangswerte sind gegeben durch  $y_0 : [-\tau_m, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Als metrischen Raum setzen wir die Menge

$$X = C([-\tau_m, 0], D) = \{x : [-\tau_m, 0] \rightarrow D : x \text{ stetig}\}$$

mit der Metrik

$$d(x, \tilde{x}) = \|x - \tilde{x}\|_\infty = \max_{t \in [-\tau_m, 0]} \|x(t) - \tilde{x}(t)\|_2 \quad (2.6)$$

an. Wieder wird vorausgesetzt, dass Lösungen von AWPen zum System (1.9) eine eindeutige Lösung mit  $y(t; y_0) \in D$  für alle  $t \geq 0$  besitzen. Wir definieren die



Abbildungen

$$\varphi_t : X \rightarrow X, \quad (\varphi_t(y_0))(r) = y(t+r; y_0) \quad \text{für } r \in [-\tau_m, 0],$$

wobei  $t \geq 0$ . Die Familie  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  ist dann ein Halbfluss gemäß Definition 2.2. Abbildung 6 demonstriert die Abbildungen des Halbflusses.

Bei einem System aus gewöhnlichen Dgln. liegt durch  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge des endlichdimensionalen Vektorraums  $\mathbb{R}^n$  vor. Bei einem System aus verzögerten Dgln. ist  $X = C([- \tau_m, 0], D)$ , d.h. eine unendlichdimensionale Teilmenge des Vektorraums  $C([- \tau_m, 0], \mathbb{R}^n)$ . Daher besitzen verzögerte Dgln. bereits eine Komplexität wie (einfache) partielle Differentialgleichungen.

## 2.5 Lineare Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir lineare Systeme aus verzögerten Dgln. und deren Eigenschaften.

Ein lineares System aus gewöhnlichen Dgln. hat die Gestalt

$$y'(t) = Ay(t) \tag{2.7}$$

mit einer konstanten Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Für eine Lösung  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  machen wir den Ansatz

$$y(t) = e^{\lambda t} v \tag{2.8}$$

mit einer Konstanten  $\lambda \in \mathbb{C}$  und einem Vektor  $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ . Einsetzen in (2.7) und Division durch  $e^{\lambda t}$  liefert mit der Einheitsmatrix  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$(\lambda I - A)v = 0.$$

Eine Lösung (2.8) ungleich null liegt genau dann vor, falls  $v$  ein Eigenvektor der Matrix  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$  ist. Die *charakteristische Gleichung* zur linearen Dgl. (2.7) lautet daher

$$p(\lambda) := \det(\lambda I - A) = 0.$$

Dies stellt ein Nullstellenproblem für ein Polynom  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  (vom Grad  $n$ ) dar und somit eine algebraische Gleichung.

**Definition 2.3** *Ein lineares System aus verzögerten Dgln. mit Verzögerungen  $\tau_1 < \dots < \tau_m$  besitzt die Form*

$$y'(t) = A_0 y(t) + \sum_{i=1}^m A_i y(t - \tau_i) \tag{2.9}$$

mit konstanten Matrizen  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  für  $i = 0, 1, \dots, m$  und  $A_i \neq 0$  für  $i = 1, \dots, m$ .

Ein lineares System inklusive nur einer Verzögerung lautet dann

$$y'(t) = Ay(t) + By(t - \tau) \quad (2.10)$$

mit Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Satz 2.4** *Ein lineares System aus verzögerten Dgln. (2.9) mit Verzögerungen  $\tau_1 < \dots < \tau_m$  hat folgende Eigenschaften.*

1. *Die Menge der Lösungen auf einem Intervall  $[-\tau_m, T) \subseteq \mathbb{R}$  mit  $0 < T \leq \infty$  bilden einen Vektorraum über  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$ .*
2. *Lösungen von AWPen existieren für alle  $t \geq -\tau_m$  und sind eindeutig.*

Beweis:

1. Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  sowie  $I = [-\tau_m, T)$ . Sind  $x, y : I \rightarrow \mathbb{K}$  Lösungen, dann folgt

$$\begin{aligned} (x + y)'(t) &= x'(t) + y'(t) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - \tau_i) + A_0y(t) + \sum_{i=1}^m A_i y(t - \tau_i) \\ &= A_0(x(t) + y(t)) + \sum_{i=1}^m A_i (x(t - \tau_i) + y(t - \tau_i)) \end{aligned}$$

für  $t \in I$ . Somit ist  $x + y$  wieder eine Lösung. Mit  $\alpha \in \mathbb{K}$  folgt

$$\begin{aligned} (\alpha y)'(t) &= \alpha y'(t) = \alpha \left( A_0 y(t) + \sum_{i=1}^m A_i y(t - \tau_i) \right) \\ &= A_0 (\alpha y(t)) + \sum_{i=1}^m A_i (\alpha y(t - \tau_i)) \end{aligned}$$

für  $t \in I$ . Also ist  $\alpha y$  auch eine Lösung.

2. Die rechte Seite der Dgl.  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lautet

$$f(y, z_1, \dots, z_m) = A_0 y + \sum_{i=1}^m A_i z_i$$

und ist beliebig oft stetig differenzierbar. Dadurch sind die Voraussetzungen aus Satz 2.1 über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen erfüllt. Sei  $\|\cdot\|$  eine

beliebige Vektornorm und  $\|\cdot\|_*$  die induzierte Matrixnorm (Operatornorm). Eine Abschätzung zeigt

$$\begin{aligned} \|f(y, z_1, \dots, z_m)\| &= \left\| A_0 y + \sum_{i=1}^m A_i z_i \right\| \leq \|A_0 y\| + \sum_{i=1}^m \|A_i z_i\| \\ &\leq \|A_0\|_* \|y\| + \sum_{i=1}^m \|A_i\|_* \|z_i\|. \end{aligned}$$

Dadurch ist die Bedingung (2.4) aus Satz 2.2 erfüllt mit den Konstanten  $\bar{c} = 0$  und  $c_i = \|A_i\|_*$  für  $i = 0, 1, \dots, m$ .  $\square$

Wir machen wieder den Ansatz der Form (2.8) für eine Lösung des verzögerten Dgl.-Systems (2.9). Einsetzen in das System ergibt

$$\lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} A_0 v + \sum_{i=1}^m e^{\lambda(t-\tau_i)} A_i v.$$

Division durch  $e^{\lambda t}$  liefert

$$\lambda v = A_0 v + \sum_{i=1}^m e^{-\lambda \tau_i} A_i v.$$

Wir ordnen die Terme um zu

$$\left( \lambda I - A_0 - \sum_{i=1}^m e^{-\lambda \tau_i} A_i \right) v = 0.$$

Diese Bedingung führt auf die folgende Definition.

**Definition 2.4** Die charakteristische Gleichung eines linearen Systems mit mehreren Verzögerungen (1.9) lautet

$$g(\lambda) := \det \left( \lambda I - A_0 - \sum_{i=1}^m e^{-\lambda \tau_i} A_i \right) = 0 \quad (2.11)$$

mit der Unbekannten  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Die Lösungen dieser Gleichung werden als Eigenwerte des Dgl.-Systems bezeichnet.

Die Bedingung (2.11) stellt eine transzendente Gleichung dar, wodurch die praktische Lösbarkeit erheblich erschwert wird. Die Funktion  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  aus (2.11) ist eine ganze Funktion, d.h. sie ist holomorph und somit analytisch überall in  $\mathbb{C}$ . Ganze Funktionen besitzen (unter anderem) die Eigenschaften:

- i) Es gibt höchstens abzählbar viele Nullstellen in  $\mathbb{C}$ .
- ii) Jede Nullstelle ist isoliert.

Aus (ii) folgt, dass die Nullstellenmenge keinen Häufungspunkt in  $\mathbb{C}$  besitzt.

**Lemma 2.1** *Zu  $\sigma \in \mathbb{R}$  gibt es in der Halbebene  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > \sigma\}$  höchstens endlich viele Lösungen der charakteristischen Gleichung (2.11). Falls es eine Folge  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  aus paarweise verschiedenen Lösungen gibt, dann gilt  $\operatorname{Re}(\lambda_j) \rightarrow -\infty$  für  $j \rightarrow \infty$ .*

Beweis:

Sei  $\sigma$  gewählt und  $E = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > \sigma\}$  sowie  $B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$  für beliebiges  $r > 0$ . Die Lösungen von (2.11) sind genau die Nullstellen einer ganzen Funktion.

Angenommen es gibt eine unendliche Folge  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  aus paarweise verschiedenen Nullstellen in  $E$ . Die Menge  $E \cap B_r$  mit  $r > 0$  kann nur endlich viele Nullstellen enthalten. Anderenfalls gäbe es laut dem Satz von Bolzano-Weierstraß in der kompakten Menge  $B_r$  einen Häufungspunkt der Folge. Damit folgt notwendigerweise  $|\lambda_j| \rightarrow \infty$  für  $j \rightarrow \infty$ . Wir betrachten die Matrizen

$$C_j = \frac{1}{\lambda_j} \left( \lambda_j I - A_0 - \sum_{i=1}^m e^{-\lambda_j \tau_i} A_i \right) = I - \frac{1}{\lambda_j} A_0 - \sum_{i=1}^m \frac{e^{-\lambda_j \tau_i}}{\lambda_j} A_i$$

für  $j \in \mathbb{N}$  mit  $\lambda_j \neq 0$ . Es ist

$$\det(C_j) = \frac{1}{\lambda_j^m} \det \left( \lambda_j I - A_0 - \sum_{i=1}^m e^{-\lambda_j \tau_i} A_i \right) = 0$$

für alle  $j$ . Wegen  $\lambda_j \in E$  gilt die gleichmäßige Abschätzung

$$|e^{-\lambda_j \tau_i}| = e^{-\operatorname{Re}(\lambda_j) \tau_i} \leq \begin{cases} 1 & \text{für } \sigma \geq 0, \\ e^{|\sigma| \tau_i} & \text{für } \sigma < 0. \end{cases}$$

Damit folgt  $C_j \rightarrow I$ . Dies liefert mit der Stetigkeit der Determinante den Widerspruch

$$1 = \det(I) = \det \left( \lim_{j \rightarrow \infty} C_j \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \det(C_j) = 0.$$

Also kann es höchstens endlich viele Nullstellen in  $E$  geben. □

**Lemma 2.2** *Ist  $\lambda \in \mathbb{C}$  eine Lösung der charakteristischen Gleichung (2.11), dann ist auch der konjugierte Wert  $\bar{\lambda}$  eine Lösung.*

Der Beweis folgt daraus, dass sich die Konjugation durch alle beteiligten Rechenoperationen, die in der Gleichung (2.11) enthalten sind, hindurchzieht.

Im allgemeinen gibt es abzählbar unendlich viele (paarweise verschiedene) Lösungen der charakteristischen Gleichung (2.11). Damit existieren auch unendlich viele linear unabhängige Lösungen der Form (2.8). Es kann noch weitere linear unabhängige Lösungen geben.

### 3 Stabilität

In diesem Kapitel untersuchen wir die Stabilität von stationären Lösungen zu verzögerten Dgln. Nicht mehr betrachtet wird die Stabilität von periodischen Lösungen.

#### 3.1 Stationäre Lösungen

Der folgende Begriff wird wie bei gewöhnlichen Dgln. definiert.

**Definition 3.1** Gegeben sei ein System aus verzögerten Dgln. (1.9) mit einer rechter Seite  $f : D \times D \times \dots \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ). Es ist  $y^* \in D$  ein stationärer Punkt oder eine stationäre Lösung, falls  $y(t) = y^*$  für  $t \in [-\tau_m, \infty)$  eine Lösung des Systems ist.

**Satz 3.1** In der Situation aus Definition 3.1 ist  $y^* \in D$  genau dann ein stationärer Punkt, wenn

$$f(y^*, y^*, \dots, y^*) = 0. \tag{3.1}$$

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $y(t) = y^*$  für  $t \geq -\tau_m$  eine Lösung. O.E.d.A. sei  $n = 1$ . Die Dgl. ist für  $t_0 > 0$  erfüllt. Es folgt

$$0 = y'(t_0) = f(y(t_0), y(t_0), \dots, y(t_0)) = f(y^*, y^*, \dots, y^*).$$

„ $\Leftarrow$ “: Für  $y(t) = y^*$  bei  $t \in [-\tau_m, \infty]$  folgt offensichtlich  $y'(t) = f(y^*, \dots, y^*) = 0$  für alle  $t$ . Die Dgl. ist somit erfüllt.  $\square$

Die Bedingung (3.1) stellt ein nichtlineares System aus  $n$  Gleichungen für die unbekanntenen Komponenten  $y_1^*, \dots, y_n^*$  dar.

**Bemerkung 3.1** Bei Dgln. mit verteilter Verzögerung (1.11) werden stationäre Punkte wie in Definition 3.1 festgelegt. Mit der Eigenschaft einer Wahrscheinlichkeitsdichte gilt

$$\int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} y^* g(\tau) \, d\tau = y^* \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} g(\tau) \, d\tau = y^*,$$

wodurch auch die Bedingung  $f(y^*, y^*) = 0$  folgt.

**Beispiel 3.1** Wir greifen das Beispiel 1.2 auf:

$$N'(t) = r N(t) \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K}\right).$$

Für einen stationären Punkt ergibt sich das Nullstellenproblem

$$rN^* \left(1 - \frac{N^*}{K}\right) = 0.$$

Die Lösungen lauten  $N_1^* = 0$  und  $N_2^* = K$ . Es entstehen die gleichen stationären Punkte wie bei der entsprechenden gew. Dgl. ( $\tau = 0$ ).

**Beispiel 3.2** Wir untersuchen das SIR-Modell aus Beispiel 1.4. Die Nullstellenbedingung (3.1) liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\beta S^* I^* + \gamma I^* &= 0 \\ \beta S^* I^* - \gamma I^* &= 0 \\ \gamma I^* - \gamma I^* &= 0. \end{aligned}$$

Es liegt somit nur eine Gleichung vor. Wir verwenden  $-\beta S^* I^* + \gamma I^* = 0$ .

1. Fall:  $I^* = 0$  („infektionsfrei“)

Die Gleichung ist hier stets erfüllt. Die Menge der stationären Punkte lautet

$$\{(S^*, 0, R^*)^\top : S^* \in \mathbb{R}, R^* \in \mathbb{R}\}.$$

2. Fall:  $I^* \neq 0$  („endemisches Infektionsgeschehen“)

Division der Gleichung durch  $I^*$  führt auf  $-\beta S^* + \gamma = 0$ . Die Menge der stationären Punkte ist nun

$$\left\{ \left( \frac{\gamma}{\beta}, I^*, R^* \right)^\top : I^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, R^* \in \mathbb{R} \right\}$$

Unter der Voraussetzung der Nichtnegativität der Lösung sowie der Normierung  $S + I + R = 1$  ergeben sich die stationären Punkte

$$\left\{ (S^*, 0, 1 - S^*)^\top : 0 \leq S^* \leq 1 \right\} \cup \left\{ \left( \frac{\gamma}{\beta}, I^*, 1 - \frac{\gamma}{\beta} - I^* \right)^\top : 0 < I^* \leq 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right\}.$$

Die Stabilität für stationäre Lösungen wird wie bei gewöhnlichen Dgln. definiert. Den Abstand zwischen zwei Anfangswertvorgaben  $y_0, \tilde{y}_0 : [-\tau_m, 0] \rightarrow D$  quantifizieren wir mit der Metrik (2.6). Ein einzelner Anfangswert  $y_0 \in D$  wird dann konstant als Funktion fortgesetzt. Wir nehmen an, dass AWPe stets eindeutige Lösungen für alle  $t \geq -\tau_m$  besitzen.

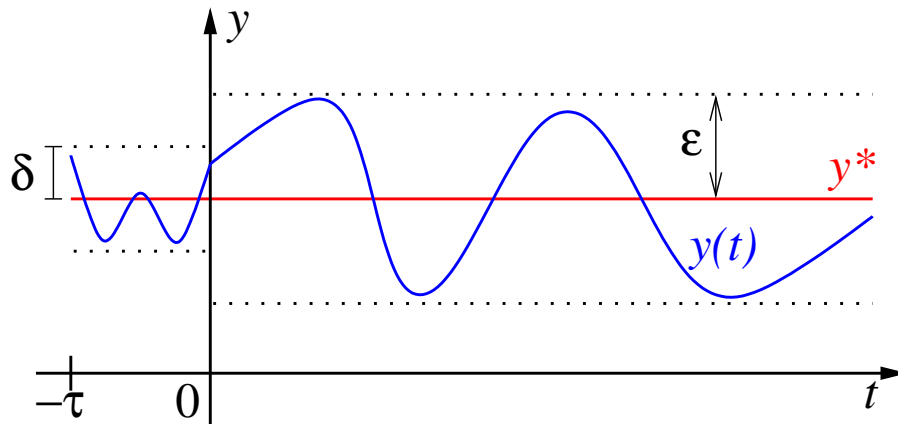


Abbildung 7: Darstellung der Stabilität einer stationären Lösung.

**Definition 3.2** Gegeben sei ein stationärer Punkt  $y^*$  eines Systems verzögerter Dgl'n. und sei  $y$  die Lösung zu Anfangswerten  $y_0$ . Der stationäre Punkt heißt stabil, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert mit

$$d(y^*, y_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad \|y^* - y(t)\|_2 < \varepsilon \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Der stationäre Punkt heißt attraktiv, falls ein  $\delta > 0$  existiert mit

$$d(y^*, y_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|y^* - y(t)\|_2 = 0.$$

Der stationäre Punkt heißt asymptotisch stabil, wenn er stabil und attraktiv ist.

### Bemerkung 3.2

- i) Die (einfache) Stabilität aus Definition 3.2 wird auch als Lyapunov-Stabilität bezeichnet.
- ii) Es gibt stationäre Punkte, die attraktiv, aber nicht stabil sind.
- iii) Die Konvergenzbedingung bei der Attraktivität ist äquivalent zu  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^*$ .
- iv) Falls ein stationärer Punkt nicht isoliert ist, dann kann er nicht attraktiv und somit nicht asymptotisch stabil sein.

Wir interessieren uns nun für Kriterien, welche die (asymptotische) Stabilität einer stationären Lösung bestimmen.



## 3.2 Lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten ein lineares System aus verzögerten Dgln. (2.9) mit Verzögerungen  $\tau_1 < \dots < \tau_m$ , siehe Definition 2.3. Der Definitionsbereich der rechten Seite  $f$  ist daher  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ . Für einen stationären Punkte gemäß Definition 3.1 ergibt sich mit Satz 3.1 die Bedingung

$$\left( \sum_{i=0}^m A_i \right) y^* = 0.$$

Sei  $\hat{A} = A_0 + A_1 + \dots + A_m$ . Die Bedingung ist daher  $y^* \in \text{kern}(\hat{A})$ . Es folgt eine Fallunterscheidung.

1. Fall:  $\hat{A}$  regulär

Es ist  $y^* = 0$  der einzige stationäre Punkt. Somit ist dieser isoliert. Dieser stationäre Punkt kann asymptotisch stabil sein oder nicht.

2. Fall:  $\hat{A}$  singulär

Es gibt einen Untervektorraum  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $\dim(U) \geq 1$  aus stationären Punkten. Dadurch gibt es keinen isolierten stationären Punkt. Somit gibt es keinen asymptotisch stabilen stationären Punkt.

**Satz 3.2** *Gegeben sei ein lineares System aus verzögerten Dgln. (2.9). Somit ist  $y^* = 0$  ein stationärer Punkt.*

*i) Ist  $y^* = 0$  stabil, dann ist jede Lösung eines AWP's jeweils beschränkt.*

*ii)  $y^* = 0$  ist genau dann attraktiv, wenn für jede Lösung eines AWP's gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0. \quad (3.2)$$

Beweis:

i) Es bezeichne  $\|\cdot\|$  die Euklidische Vektornorm. Sei  $y$  eine beliebige Lösung mit Anfangswerten nicht identisch null. Wir setzen  $\tilde{y} = \alpha y$  mit

$$\alpha = \frac{\delta}{2} \left( \max_{t \in [-\tau_m, 0]} \|y(t)\| \right)^{-1} > 0.$$

Damit ist  $d(0, \tilde{y}_0) = \frac{\delta}{2} < \delta$ . Es folgt  $\|\tilde{y}(t)\| = \|\tilde{y}(t) - y^*\| < \varepsilon$  für alle  $t \geq 0$ , siehe Definition 3.1. Dadurch gilt

$$\|y(t)\| = \left\| \frac{1}{\alpha} \tilde{y}(t) \right\| = \frac{1}{|\alpha|} \|\tilde{y}(t)\| < \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

für alle  $t \geq 0$ .

ii) Ist (3.2) für alle Lösungen erfüllt, dann auch für diejenigen mit  $d(0, y_0) < \delta$  für beliebiges  $\delta > 0$ .

Sei umgekehrt (3.2) für  $d(0, y_0) < \delta$  erfüllt. Sei  $y(t)$  eine beliebige Lösung mit Anfangswerten nicht identisch null. Wir setzen  $\tilde{y} = \alpha y$  mit  $\alpha$  wie in (i). Wegen  $d(0, \tilde{y}_0) < \delta$  folgt  $\tilde{y}(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ , siehe Definition 3.1. Somit gilt ebenfalls  $y(t) = \frac{1}{\alpha} \tilde{y}(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Satz 3.3** *Es sei ein lineares System aus verzögerten Dgln. (2.9) gegeben. Gibt es einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$ , dann ist der stationäre Punkt  $y^* = 0$  nicht attraktiv. Gibt es einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , dann ist der stationäre Punkt  $y^* = 0$  weder stabil noch attraktiv.*

Beweis:

Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert. Dann gibt es eine zugehörige Lösung (2.8) mit  $v \neq 0$ . Es bezeichne  $\|\cdot\|$  die Euklidische Vektornorm. Also gilt  $\|v\| \neq 0$ . Es folgt

$$\|y(t)\| = \|e^{\lambda t} v\| = |e^{\lambda t}| \|v\| = |e^{\operatorname{Re}(\lambda)t}| \|v\| = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \|v\|.$$

Gilt  $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$ , dann folgt  $\|y(t)\| \geq \|v\| > 0$  für alle  $t \geq 0$ . Laut Satz 3.2 (ii) kann  $y^* = 0$  nicht attraktiv sein, da (3.2) nicht gegeben ist.

Gilt  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , dann folgt  $\|y(t)\| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ . Daher ist die Lösung nicht beschränkt und es gilt nicht (3.2). Mit Satz 3.2 (i) und (ii) kann  $y^* = 0$  nicht stabil oder attraktiv sein.  $\square$

**Satz 3.4** *Es sei ein lineares System aus verzögerten Dgln. (2.9) gegeben. Der stationäre Punkt  $y^* = 0$  ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für alle Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ .*

Beweis:

Nach Satz 3.3 ist die Bedingung  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  für alle Eigenwerte notwendig für die asymptotische Stabilität.

Dass diese Bedingung hinreichend für die asymptotische Stabilität ist, wird im Beweis zu Theorem 4.3 in [20] gezeigt.  $\square$

**Bemerkung 3.3** Bei linearen Systemen aus gewöhnlichen Dgln. (2.7) kann die Stabilität und Attraktivität eindeutig anhand der Jordanschen Normalform der Matrix  $A$  erkannt werden. Im Gegensatz dazu erhalten wir bei linearen Systemen aus verzögerten Dgln. keine Aussage oder weiteres Kriterium im Fall  $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$  für alle Eigenwerte  $\lambda$ .

**Lemma 3.1** Ist in einem linearen System aus verzögerten Dgln. (2.9) die Matrix  $A_0 + A_1 + \dots + A_m$  singular, dann liegt mit  $\lambda = 0$  ein Eigenwert vor.

Beweis:

Sei  $v \in \ker(A_0 + A_1 + \dots + A_m) \setminus \{0\}$ . Für  $\lambda_0 = 0$  folgt

$$\left( \lambda_0 I - A_0 - \sum_{i=1}^m e^{-\lambda_0 \tau_i} A_i \right) v = - \left( A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \right) v = 0.$$

Also ist  $\lambda_0 = 0$  ein Eigenwert der verzögerten Dgl. □

Im Fall einer singulären Matrix folgt aus Lemma 3.1 und Satz 3.4, dass  $y^* = 0$  nicht asymptotisch stabil sein kann. In Bemerkung 3.2 wurde bereits festgestellt, dass  $y^* = 0$  nicht asymptotisch stabil sein kann, falls  $\hat{A}$  singular ist.

Wir betrachten noch ein lineares System (2.10) mit einer Verzögerung. Im Grenzfall  $\tau = 0$  entsteht das lineare System aus gewöhnlichen Dgln.  $y' = (A + B)y$ . Die folgenden Resultate zeigen, dass kleine Verzögerungen die Stabilität nicht zerstören.

**Lemma 3.2** Seien  $\mu_1, \dots, \mu_k$  die paarweise verschiedenen Eigenwerte der Matrix  $A + B$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$  mit  $\sigma < \min\{\operatorname{Re}(\mu_1), \dots, \operatorname{Re}(\mu_k)\}$  und  $\delta > 0$  beliebig. Dann gibt es ein  $\tau_0 > 0$ , so dass falls für ein  $\tau \in (0, \tau_0)$  und ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt

$$\det(\lambda I - A - e^{-\lambda \tau} B) = 0,$$

dann folgt  $\operatorname{Re}(\lambda) < \sigma$  oder  $|\lambda - \mu_i| < \delta$  für ein  $i$ .

Beweis: siehe Theorem 4.4 in [20]

**Satz 3.5** Es gelte  $\operatorname{Re}(\mu) < 0$  für alle Eigenwerte der Matrix  $A + B$ . Dann gibt es ein  $\tau_0 > 0$ , so dass beim linearen System aus verzögerten Dgln. (2.10) dann der stationäre Punkt  $y^* = 0$  asymptotisch stabil für alle  $0 < \tau < \tau_0$  ist.

Beweis:

Es sei mit einem  $\varepsilon > 0$

$$\sigma = \min\{\operatorname{Re}(\mu_1), \dots, \operatorname{Re}(\mu_k)\} - \varepsilon \quad \text{und} \quad s = \max\{\operatorname{Re}(\mu_1), \dots, \operatorname{Re}(\mu_k)\}.$$

Dann gilt  $\sigma, s < 0$ . Wir wählen  $\delta = |s|$  in Lemma 3.2. Für einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  der linearen verzögerten Dgl. gilt dann  $\operatorname{Re}(\lambda) < \sigma < 0$  oder  $\operatorname{Re}(\lambda) < \operatorname{Re}(\mu_i) + \delta \leq 0$  für ein  $i$  wegen  $|\operatorname{Re}(\lambda) - \operatorname{Re}(\mu_i)| \leq |\lambda - \mu_i|$ . Mit Satz 3.4 folgt die asymptotische Stabilität.  $\square$

### 3.3 Skalare lineare Differentialgleichung

Wir untersuchen im Detail die einzelne verzögerte Dgl.

$$y'(t) = ay(t) + by(t - \tau) \tag{3.3}$$

mit Konstanten  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und einer Verzögerung  $\tau > 0$ . Es ist  $y^* = 0$  ein stationärer Punkt, welcher für  $a + b \neq 0$  eindeutig ist. Mit Definition 2.4 ergibt sich als charakteristische Gleichung

$$\lambda - a - be^{-\lambda\tau} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = a + be^{-\lambda\tau}. \tag{3.4}$$

Auch diese Gleichung ist im allgemeinen nicht explizit lösbar. Mit  $\lambda = \alpha + i\beta$  erhalten wir aus (3.4)

$$\begin{aligned} \alpha + i\beta &= a + be^{-(\alpha+i\beta)\tau} \\ &= a + be^{-\alpha\tau} e^{-i\beta\tau} \\ &= a + be^{-\alpha\tau} (\cos(\beta\tau) - i \sin(\beta\tau)). \end{aligned}$$

Ein Vergleich von Real- und Imaginärteil ergibt das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha &= a + be^{-\alpha\tau} \cos(\beta\tau) \\ \beta &= -be^{-\alpha\tau} \sin(\beta\tau). \end{aligned} \tag{3.5}$$

In Nullstellenform lautet das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1(\alpha, \beta) &= \alpha - a - be^{-\alpha\tau} \cos(\beta\tau) = 0 \\ f_2(\alpha, \beta) &= \beta + be^{-\alpha\tau} \sin(\beta\tau) = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

**Lemma 3.3** *Ist  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert der linearen verzögerten Dgl. (3.3), dann gilt*

$$\operatorname{Re}(\lambda) \leq \max\{0, a + |b|\}.$$

Beweis:

Für  $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$  ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt. Sei daher  $\operatorname{Re}(\lambda) = \alpha > 0$ . Aus der ersten Gleichung in (3.5) folgt

$$\alpha \leq a + |be^{-\alpha\tau} \cos(\beta\tau)| = a + |b| \cdot \underbrace{|e^{-\alpha\tau}|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|\cos(\beta\tau)|}_{\leq 1} \leq a + |b|,$$

was zu zeigen war. □

### Reelle Eigenwerte:

Wir untersuchen den Fall von reellen Eigenwerten, d.h.  $\beta = 0$ . Für  $\beta = 0$  ist die zweite Gleichung erfüllt. Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$\alpha = a + be^{-\alpha\tau}. \quad (3.7)$$

Diese Gleichung kann nicht explizit nach  $\alpha$  aufgelöst werden.

Wir diskutieren die Gleichung (3.7) weiter. Es sei  $g_1(\alpha) = \alpha$  und  $g_2(\alpha) = a + be^{-\alpha\tau}$ , d.h.  $g_1(\alpha) = g_2(\alpha)$ . Es gilt  $g_1(0) = 0$  und  $g_2(0) = a + b$ . Für  $b > 0$  ist  $g_2(\alpha)$  streng monoton fallend. Für  $b < 0$  ist  $g_2(\alpha)$  streng monoton steigend. Desweiteren gilt

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} g_2(\alpha) = a.$$

1. Fall:  $a + b > 0$

In beiden Unterfällen  $b > 0$  und  $b < 0$  gibt es genau eine Lösung  $g_1 = g_2$  mit  $\alpha > 0$ . Abbildung 8 (links) veranschaulicht diese Situation. Somit ist  $y^* = 0$  nicht stabil.

2. Fall:  $a + b < 0$

Sei  $b < a$ . Es folgt  $b < a < -b$ . Zudem muss dann  $b < 0$  gelten (sonst  $a + b > 0$ ). Dadurch ist  $g_2$  monoton steigend. Im Unterfall  $a > 0$  gibt es für hinreichend hohes  $\tau$  eine Lösung  $g_1 = g_2$  mit  $\alpha > 0$ . Abbildung 8 (rechts) zeigt dieses Verhalten. Folglich ist  $y^* = 0$  nicht stabil. Im Unterfall  $a < 0$  gibt es keine Lösung  $g_1 = g_2$  mit  $\alpha > 0$ . Stabilität oder Attraktivität ist dann noch nicht entschieden.

### Rein imaginäre Eigenwerte:

Andererseits betrachten wir den Fall  $\alpha = 0$ , wo die Grenze der Stabilität vorliegt. Das Gleichungssystem (3.5) vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} -a &= b \cos(\beta\tau) \\ \beta &= -b \sin(\beta\tau). \end{aligned}$$

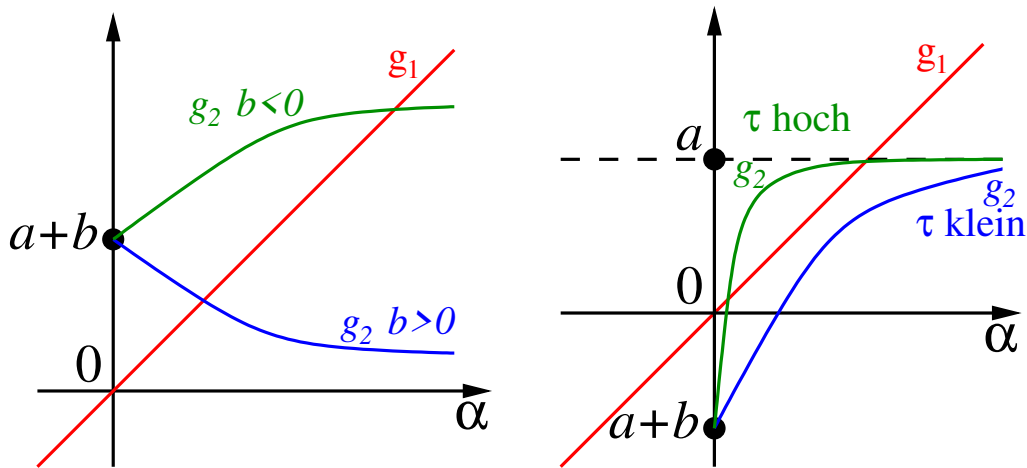


Abbildung 8: Lösungen zum Gleichungssystem für reelle Eigenwerte bei skalarer linearer Dgl. mit Verzögerung (Fall  $a + b > 0$  links und Fall  $a + b < 0$  rechts).

Quadrieren und addieren dieser Gleichungen führt auf

$$a^2 + \beta^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad \beta = \pm\sqrt{b^2 - a^2},$$

welches  $|a| \leq |b|$  erfordert. Der Fall  $|a| = |b|$  liefert den Eigenwert  $\lambda = 0$ , welcher aber reell ist. Einsetzen in die erste Gleichung und Auflösen nach  $\tau$  ergibt

$$\tau_0 = \frac{\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)}{\sqrt{b^2 - a^2}}. \quad (3.8)$$

**Satz 3.6** Bei der linearen verzögerten Dgl. (3.3) gilt für den stationären Punkt  $y^* = 0$ :

- i) Falls  $a + b > 0$ , dann ist  $y^*$  instabil,
- ii) Falls  $a + b < 0$  und  $b \geq a$ , dann ist  $y^*$  asymptotisch stabil,
- iii) Falls  $a + b < 0$  und  $b < a$ , dann gilt mit  $\tau_0 > 0$  aus (3.8), dass  $y^*$  asymptotisch stabil für  $0 < \tau < \tau_0$  und instabil für  $\tau > \tau_0$  ist.

Beweis: siehe Theorem 4.7 in [20]

Die Aussagen über die Instabilität in (i) und (iii) haben wir bereits (teilweise) oben beobachtet. Satz 3.6 gilt auch im Fall  $b = 0$ , wobei eine gewöhnliche Dgl. vorliegt.

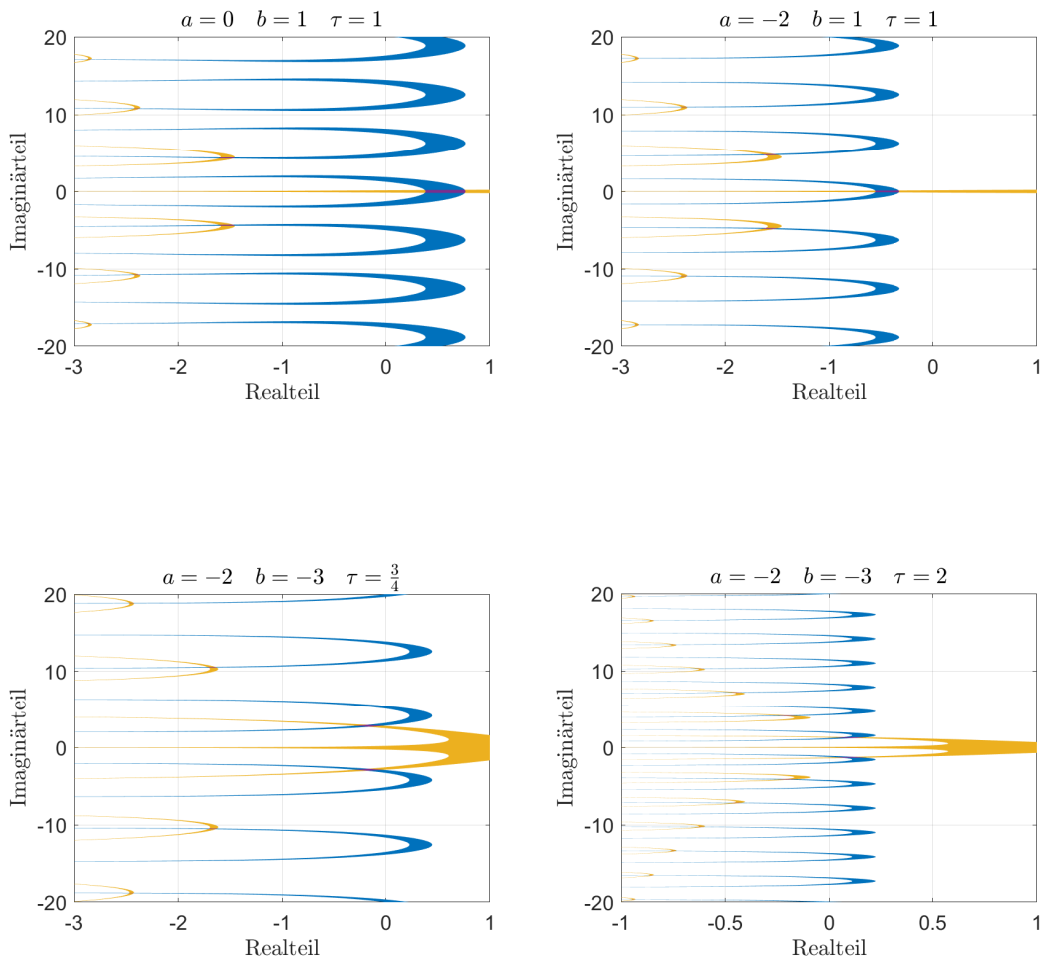


Abbildung 9: Näherungen der Nullstellenmengen im Gleichungssystem (3.6). Nullstellenmenge von  $f_1$  in blau und von  $f_2$  in gelb.

Die Nullstellenmengen der Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  im Gleichungssystem (3.6) bestehen jeweils aus Kurven in der komplexen Zahlenebene. Wir nähern diese Nullstellenmengen an. In einem Bereich

$$\{z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} : \alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}, \beta_{\min} \leq \beta \leq \beta_{\max}\}$$

werden die Funktionen auf einem feinen Gitter ausgewertet. Gilt  $|f_i| < \eta$  für ein  $i \in \{1, 2\}$  mit einem kleinen Schwellenwert  $\eta > 0$ , dann wird der jeweilige Bereich eingefärbt. Abbildung 9 zeigt die Näherungen zu vier Fällen mit unterschiedlicher Parameterwahl. Diese Fälle stehen im Einklang mit den Aussagen in Satz 3.6.

### 3.4 Nichtlineare Differentialgleichungen

Wir betrachten zunächst ein nichtlineares System aus verzögerten Dgl. der Form (1.3) mit einer Verzögerung. Die rechte Seite  $f : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ) sei stetig differenzierbar. Ein stationärer Punkt  $y^* \in D$  sei gegeben. Wir linearisieren das System um den konstanten Zustand  $y^*$ . Taylor-Entwicklung bis zu Restgliedern zweiter Ordnung liefert (falls  $f$  zweimal stetig differenzierbar)

$$f(y^* + \tilde{y}, y^* + \tilde{z}) = \underbrace{f(y^*, y^*)}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial y}(y^*, y^*) \tilde{y} + \frac{\partial f}{\partial z}(y^*, y^*) \tilde{z} + \mathcal{O}(\|\tilde{y}\|_2^2) + \mathcal{O}(\|\tilde{z}\|_2^2).$$

Die Funktionalmatrizen  $A = \frac{\partial f}{\partial y}(y^*, y^*)$  und  $B = \frac{\partial f}{\partial z}(y^*, y^*)$  enthalten partielle Ableitungen. Mit  $\varepsilon(t) = y(t) - y^*$  folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon'(t) &= y'(t) = f(y(t), y(t - \tau)) = f(\varepsilon(t) + y^*, \varepsilon(t - \tau) + y^*) \\ &= A\varepsilon(t) + B\varepsilon(t - \tau) + \mathcal{O}(\|\varepsilon(t)\|_2^2) + \mathcal{O}(\|\varepsilon(t - \tau)\|_2^2). \end{aligned}$$

Es ergibt sich die linearisierte Gleichung

$$\varepsilon'(t) = A\varepsilon(t) + B\varepsilon(t - \tau),$$

welches eine lineare verzögerte Dgl. der Form (2.10) ist.

Nun behandeln wir ein nichtlineares System aus verzögerten Dgl. (1.9) mit Verzögerungen  $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$ . Die rechte Seite  $f : D \times D \times \dots \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ) sei stetig differenzierbar. Eine Linearisierung ergibt analog die Gleichung

$$\varepsilon'(t) = A_0\varepsilon(t) + \sum_{i=1}^m A_i\varepsilon(t - \tau_i) \quad (3.9)$$

mit den konstanten Matrizen

$$A_0 = \frac{\partial f}{\partial y}(y^*, \dots, y^*), \quad A_i = \frac{\partial f}{\partial z_i}(y^*, \dots, y^*) \quad \text{für } i = 1, \dots, m.$$

Somit liegt eine lineare verzögerte Dgl. der Gestalt (2.9) vor.



**Satz 3.7** Gegeben sei ein nichtlineares System aus verzögerten Dgln. (1.9) mit stetig differenzierbarer rechter Seite und ein stationärer Punkt  $y^*$ . Betrachtet werden die Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{C}$  der zugehörigen linearisierten Dgl. (3.9).

- i) Gilt  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  für alle Eigenwerte  $\lambda$ , dann ist der stationäre Punkt asymptotisch stabil.
- ii) Gilt  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  für einen Eigenwert  $\lambda$ , dann ist der stationäre Punkt instabil.

Beweis: siehe Literaturverweise zu Theorem 4.8 in [20]

**Bemerkung 3.4** Es gibt keine allgemeine Aussage über die (asymptotische) Stabilität im Fall  $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$  für alle Eigenwerte  $\lambda$ . Dies ist die gleiche Situation wie bei nichtlinearen Systemen aus gewöhnlichen Dgln.

Die Eigenwerte eines linearen Systems aus verzögerten Dgln. ( $n \geq 2$ ) zu bestimmen bzw. zu diskutieren ist schwierig bis unmöglich. Jedoch haben wir bei skalaren nichtlinearen verzögerten Dgln. ( $n = 1$ ) eine linearisierte Gleichung (3.3), wo Satz 3.6 anwendbar ist.

**Beispiel 3.3** Wir greifen die Populationsdynamik mit logistischem Wachstum aus Beispiel 1.2 und Beispiel 3.1 auf. Die stationären Punkte sind  $y^* = 0$  und  $y^* = K$ . Die rechte Seite der verzögerten Dgl. besitzt die Gestalt

$$f(y, z) = ry \left(1 - \frac{z}{K}\right)$$

mit  $r, K > 0$ . Die partiellen Ableitungen sind  $\frac{\partial f}{\partial y} = r(1 - \frac{z}{K})$  und  $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{r}{K}y$ .

1. Fall:  $y^* = 0$

Die linearisierte Dgl. lautet

$$\varepsilon'(t) = r\varepsilon(t).$$

Wir haben eine Dgl. der Form (3.3) mit  $a = r > 0$  und  $b = 0$ . Aus Satz 3.6 (i) folgt, dass der stationäre Punkt  $\varepsilon^* = 0$  stets instabil ist. Mit unserer Diskussion in Abschnitt 3.3 gibt es einen Eigenwert  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ . Mit Satz 3.7 impliziert somit, dass der stationäre Punkt  $y^* = 0$  instabil ist.

2. Fall:  $y^* = K$

Die linearisierte Dgl. ergibt sich zu

$$\varepsilon'(t) = -r\varepsilon(t - \tau).$$

Daher erhalten wir die Dgl. (3.3) mit  $a = 0$  und  $b = -r < 0$ . Aus Satz 3.6 (iii) folgt, dass der stationäre Punkt  $\varepsilon^* = 0$  asymptotisch stabil für kleine Verzögerungen und instabil für große Verzögerungen ist. Mit Satz 3.7 überträgt sich dies auf den stationären Punkt  $y^* = 0$  zur nichtlinearen Dgl.

Diese Resultate stehen im Einklang mit den Beobachtungen bei den Lösungen von AWPen in Abbildung 1.

**Beispiel 3.4** Wir greifen das SIR-Modell aus Beispiel 1.4 und Beispiel 3.2 auf. Wegen der Normierung betrachten wir nur die Populationen  $S$  und  $I$ . Wir erhalten ein nichtlineares Dgl.-System mit einer Verzögerung

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t)I(t) + \gamma I(t - \tau) \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t). \end{aligned}$$

Als stationäre Punkte liegen die Scharen  $(S^*, 0)$  für  $0 \leq S^* \leq 1$  und  $(\frac{\gamma}{\beta}, I^*)$  für  $0 < I^* \leq 1 - \frac{\gamma}{\beta}$  (falls  $\frac{\gamma}{\beta} \leq 1$ ) vor. Wir schreiben die rechte Seite des Dgl.-Systems als

$$f(y, z) = \begin{pmatrix} -\beta y_1 y_2 + \gamma z_2 \\ \beta y_1 y_2 - \gamma y_2 \end{pmatrix}.$$

Die Funktionalmatrizen lauten

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y, z) = \begin{pmatrix} -\beta y_2 & -\beta y_1 \\ \beta y_2 & \beta y_1 - \gamma \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(y, z) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Am stationären Punkt  $y^* = (y_1^*, 0)^\top$  ergibt sich

$$A = \frac{\partial f}{\partial y}(y^*, y^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta y_1^* \\ 0 & \beta y_1^* - \gamma \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \frac{\partial f}{\partial z}(y^*, y^*) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dadurch ist die erste Spalte in  $A + B$  null und diese Matrix somit singular. Mit Lemma 3.1 folgt, dass  $\lambda = 0$  ein Eigenwert der linearisierten Dgl. ist. Das hinreichende Kriterium für asymptotische Stabilität aus Satz 3.7 ist hier nicht erfüllt. Wir wissen bereits, dass stationäre Punkte aus dieser Schar nicht asymptotisch stabil sein können, da sie nicht isoliert sind.

## 4 Numerische Verfahren

In diesem Kapitel wird die numerische Lösung von AWPen zu verzögerten Dgln. behandelt.

### 4.1 Runge-Kutta-Verfahren

Wir betrachten ein AWP eines (nichtautonomen) Systems aus gewöhnlichen Dgln.

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \quad (4.1)$$

auf einem Zeitintervall  $[t_0, t_{\text{end}}]$  ( $t_0 < t_{\text{end}}$ ). Es sei  $f : [t_0, t_{\text{end}}] \times D \rightarrow \mathbb{R}^d$  ( $D \subseteq \mathbb{R}^d$ ) stetig in  $t$  und lokal Lipschitz-stetig in  $y$ . Dadurch ist die lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung gesichert. Die Existenz bis zu  $t = t_{\text{end}}$  wird vorausgesetzt.

Wir möchten das AWP (4.1) nun näherungsweise lösen. Alle gängigen numerischen Verfahren verwenden hierzu ein Gitter mit Zeitpunkten

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_{\text{end}}. \quad (4.2)$$

Es bezeichne  $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$  die Schrittweiten. Eine mögliche Wahl sind äquidistante Zeitpunkte  $t_n = t_0 + nh$  mit  $h = \frac{t_{\text{end}} - t_0}{N}$  für  $n = 0, 1, \dots, N$ . Numerische Lösungen  $y_n \approx y(t_n)$  werden sukzessive berechnet. In einem Einschrittverfahren wird der Wert  $y_{n+1}$  nur in Abhängigkeit des Werts  $y_n$  bestimmt.

Der bedeutendste Typ bei Einschrittverfahren sind die Runge-Kutta-Verfahren. Wir betrachten die zum AWP (4.1) äquivalente Integralgleichung

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds. \quad (4.3)$$

Auf dem Intervall  $[t_0, t_0 + h_1]$  folgt aus (4.3)

$$y(t_0 + h_1) = y_0 + h_1 \int_0^1 f(t_0 + sh_1, y(t_0 + sh_1)) \, ds. \quad (4.4)$$

Die Idee besteht darin, das Integral in (4.4) durch eine Quadraturformel mit den Knoten  $c_1, \dots, c_s \in [0, 1]$  und (äußeren) Gewichten  $b_1, \dots, b_s \in \mathbb{R}$  zu ersetzen. O.E.d.A. sei  $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_s$ . Es folgt eine endliche Summe

$$y_1 = y_0 + h_1 \sum_{i=1}^s b_i f(t_0 + c_i h_1, y(t_0 + c_i h_1)).$$

Das Problem ist nun, dass die Zwischenwerte  $y(t_0 + c_i h_1)$  a priori unbekannt sind. Wir erhalten Näherungen für die Zwischenwerte wieder mittels der Integralgleichung (4.3), d.h.

$$y(t_0 + c_i h_1) = y_0 + h_1 \int_0^{c_i} f(t_0 + sh_1, y(t_0 + sh_1)) ds.$$

Die beteiligten Integrale werden durch Quadraturformeln ersetzt. Um die Einführung neuer Unbekannten dabei zu vermeiden, dürfen nur die gleichen Knoten  $c_1, \dots, c_s$  wie zuvor verwendet werden. Es entstehen neue (innere) Gewichte  $a_{ij}$ .

**Definition 4.1** *Ein Runge-Kutta-Verfahren (RK-Verfahren) ist ein Einschrittverfahren zur Lösung des AWP (4.1) der Form*

$$Y_{n+1}^i = y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_{n+1}^j, Y_{n+1}^j) \quad \text{für } i = 1, \dots, s \quad (4.5)$$

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^s b_i f(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i) \quad (4.6)$$

mit  $t_{n+1}^i = t_n + c_i h_{n+1}$  und den Knoten  $c_i$  sowie den Gewichten  $a_{ij}$  und  $b_i$  für  $i, j = 1, \dots, s$ . Es ist  $s$  die Stufenzahl des Verfahrens.

Ein RK-Verfahren ist eindeutig durch seine Koeffizienten festgelegt. Die Koeffizienten können in einem sogenannten *Butcher-Tableau* angeordnet werden:

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array} \quad \text{oder kurz} \quad \begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^\top \end{array}$$

mit  $c \in \mathbb{R}^s$ ,  $b \in \mathbb{R}^s$ ,  $A \in \mathbb{R}^{s \times s}$ .

In (4.5), (4.6) liegt die Y-Notation des Verfahrens vor. Eine äquivalente Darstellung eines RK-Verfahrens ist die K-Notation

$$K_{n+1}^i = f\left(t_{n+1}^i, y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^s a_{ij} K_{n+1}^j\right) \quad \text{für } i = 1, \dots, s \quad (4.7)$$

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^s b_i K_{n+1}^i. \quad (4.8)$$

Dabei werden  $K_{n+1}^1, \dots, K_{n+1}^s$  auch als Inkremente bezeichnet.

Die Zwischenwerte (auch: Stufenwerte) in (4.5) können als Näherungen

$$Y_{n+1}^i \approx y(t_n + c_i h_{n+1}) \quad (4.9)$$

für  $i = 1, \dots, s$  interpretiert werden. Eine naheliegende Forderung ist, dass das Verfahren eine konstante Funktion  $f \equiv 1$  ( $y(t_n + c_i h_{n+1}) = y_n + c_i h_{n+1}$ ) exakt reproduziert. Wir erhalten die Bedingungen

$$c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij} \quad \text{für } i = 1, \dots, s. \quad (4.10)$$

Diese Gleichung bedeutet, dass die Summe der Gewichte gleich der (relativen) Länge des Teilintervalls sein muss. Die Approximation (4.9) ist dann exakt. Im folgenden setzen wir stets (4.10) voraus.

Das einfachste RK-Verfahren ist das explizite Euler-Verfahren, welches die Formel

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1} f(t_n, y_n) \quad (4.11)$$

besitzt ( $s = 1, a_{11} = 0, b_1 = 1$ ). Hier ist nur eine Funktionsauswertung von  $f$  pro Integrationsschritt notwendig. Das implizite Euler-Verfahren lautet

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1} f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

( $s = 1, a_{11} = 1, b_1 = 1$ ). Um die neue Näherung zu erhalten, ist jeweils ein nichtlineares Gleichungssystem für die Unbekannte  $y_{n+1}$  zu lösen.

## Explizite Runge-Kutta-Verfahren

Ein explizites RK-Verfahren liegt vor, wenn für die inneren Gewichte gilt  $a_{ij} = 0$  für  $i \leq j$ . Die Matrix  $A$  ist somit eine strikte untere Dreiecksmatrix. Wegen  $a_{11} = a_{12} = \dots = a_{1s} = 0$  folgt  $Y_{n+1}^1 = y_n$ . Die Zwischenwerte (4.5) ergeben sich sukzessive aus

$$Y_{n+1}^i = y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t_{n+1}^j, Y_{n+1}^j) \quad \text{für } i = 1, \dots, s.$$

Der Rechenaufwand einer expliziten Runge-Kutta-Methode besteht somit nur in  $s$  Auswertungen der rechten Seite  $f$ . Tabelle 2 zeigt die Butcher-Tableaus zu drei bekannten expliziten RK-Verfahren.

## Implizite Runge-Kutta-Verfahren

Ist ein RK-Verfahren nicht explizit, so ist es implizit. Folglich gilt  $a_{ij} \neq 0$  für (Pindestens) ein Paar  $(i, j)$  mit  $i \leq j$ . Jetzt können die Zwischenwerte nicht sukzessive berechnet werden. Stattdessen liefern die Formeln (4.5) ein nichtlineares

Tabelle 2: Butcher-Tableaus für drei explizite RK-Verfahren: Collatz-Verfahren (links), Kutta-Simpson-Verfahren (Mitte) und klassisches Runge-Kutta-Verfahren (rechts).

$$\begin{array}{c|c}
 0 & \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 \hline
 & 0 \quad 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c|cc}
 0 & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
 1 & -1 & 2 \\
 \hline
 & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \quad \frac{1}{6}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c|ccc}
 0 & & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
 \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \quad \frac{1}{6}
 \end{array}$$

Tabelle 3: Butcher-Tableaus für drei implizite RK-Verfahren: Gauß-Runge-Kutta-Verfahren (links), Trapez-Regel (Mitte) und Ehle-Verfahren (rechts).

$$\begin{array}{c|cc}
 \frac{3-\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{3-2\sqrt{3}}{12} \\
 \frac{3+\sqrt{3}}{6} & \frac{3+2\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} \\
 \hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c|cc}
 0 & 0 & 0 \\
 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 \hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c|ccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} & \frac{5}{24} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} \\
 1 & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \\
 \hline
 & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6}
 \end{array}$$

Gleichungssystem für die Unbekannten  $Y_{n+1}^1, \dots, Y_{n+1}^s$ . Unter üblichen Voraussetzungen kann das Gleichungssystem näherungsweise mit dem Newton-Verfahren gelöst werden. Jedoch entsteht ein relativ hoher Rechenaufwand pro Integrations-schritt im Vergleich zu expliziten Verfahren. Tabelle 3 zeigt die Butcher-Tableaus zu drei bekannten impliziten RK-Verfahren.

### Konsistenz und Konvergenz

Wir befassen uns mit der Konvergenz eines RK-Verfahrens. Dazu wird angenommen, dass die Lösung  $y$  des AWP (4.1) hinreichend glatt ist. Dies wiederum erfordert eine hinreichend glatte rechte Seite  $f$  bezüglich der Variable  $y$ . Es wird eine beliebige Vektornorm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^d$  verwendet.

**Definition 4.2** Ein RK-Verfahren (4.5), (4.6) heißt konsistent mit Ordnung  $p$ , wenn  $p \geq 1$  die größte ganze Zahl ist, so dass für alle  $f \in C^p$  gilt

$$\|z_{n+1}(t_{n+1}) - y_{n+1}\| = \mathcal{O}(h_{n+1}^{p+1}) \quad (4.12)$$

für  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . Dabei entstehen  $y_{n+1}$  und  $z_{n+1}$  aus dem Anfangswert  $y_n^*$ . Es ist  $z_{n+1}$  die Lösung des lokalen AWP

$$z'_{n+1}(t) = f(t, z_{n+1}(t)), \quad z_{n+1}(t_n) = y_n^* \quad (4.13)$$

für  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ . Die Bedingung (4.12) muss gleichmäßig für alle  $y_n^*$  in einem beschränkten Bereich gelten.

**Definition 4.3** Ein RK-Verfahren (4.5), (4.6) heißt konvergent mit Ordnung  $p$ , wenn  $p \geq 1$  die größte ganze Zahl ist, so dass für alle  $f \in C^p$  auf beschränktem Intervall  $[t_0, t_{\text{end}}]$  gilt

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|y(t_n) - y_n\| = \mathcal{O}(h^p), \quad (4.14)$$

wobei

$$h = \max_{1 \leq n \leq N} h_n \quad (4.15)$$

die maximale Schrittweite bezeichnet.

Die Differenzen in der Norm bei (4.12) werden auch als *lokale Fehler* bezeichnet. Dagegen stellen die Differenzen in der Norm bei (4.14) die *globalen Fehler* dar. Bei RK-Verfahren und auch allgemein bei Einschritt-Verfahren besteht zwischen Konsistenz und Konvergenz der folgende Zusammenhang.

**Satz 4.1** Ist ein RK-Verfahren (4.5), (4.6) konsistent mit Ordnung  $p$  laut Definition 4.2, dann ist es auch konvergent mit Ordnung  $p$  laut Definition 4.3.

Beweis: siehe Satz 7.2.2.3 in [22]

## Ordnungsbedingungen

Ein RK-Verfahren wird eindeutig durch seine Koeffizienten (d.h. Knoten  $c_i$ , innere Gewichte  $a_{ij}$ , äußeren Gewichte  $b_i$ ) festgelegt. Wir setzen wieder die Bedingung (4.10) voraus. Die Konsistenz des Verfahrens mit Ordnung  $p$  liegt vor, wenn die Koeffizienten gewisse Bedingungen erfüllen, welche durch Taylor-Entwicklung und Koeffizientenvergleiche zu Termen mit Potenzen der Schrittweite hergeleitet werden können.

Die Konsistenzbedingungen bis Ordnung  $p = 4$  lauten:

$p = 1 :$	$\sum_{i=1}^s b_i = 1$	$p = 4 :$	$\sum_{i=1}^s b_i c_i^3 = \frac{1}{4}$
$p = 2 :$	$\sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2}$		$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_i c_j = \frac{1}{8}$
$p = 3 :$	$\sum_{i=1}^s b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$		$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12}$
	$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$		$\sum_{i,j,\ell=1}^s b_i a_{ij} a_{j\ell} c_\ell = \frac{1}{24}$

Tabelle 4: Ordnung und Stufenzahl bei expliziten RK-Verfahren.

Stufenzahl $s$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	17
maximale Ordnung $p$	1	2	3	4	4	5	6	6	7	7	8	...	10
Ordnung $p$					1	2	3	4	5	6	7	8	
minimale Stufenzahl $s$					1	2	3	4	6	7	9	11	
Anzahl Ordnungsbedingungen					1	2	4	8	17	37	85	200	

Die Ordnungsbedingungen für festes  $p$  können bei hinreichend hoher Stufenzahl  $s$  (und damit hinreichend hoher Anzahl an Koeffizienten) erfüllt werden. Bei impliziten RK-Verfahren mit  $s$  Stufen kann eine maximale Ordnung  $p = 2s$  erreicht werden. Bei expliziten RK-Verfahren gilt für die maximale Ordnung  $p = s$  für  $s \leq 4$  und  $p < s$  für  $s \geq 5$ . Tabelle 4 zeigt genauere Werte.

## 4.2 Stetige Runge-Kutta-Verfahren

Wir möchten AWPe zu verzögerten Dgln. mit der Schritte-Methode numerisch lösen. Dies erfordert bei einem Integrationsschritt von  $t_n$  zu  $t_{n+1}$  die Auswertung der rechten Seite auch für die Lösung  $y(t)$  zu früheren Zeiten  $t < t_n$ . Ein RK-Verfahren (4.5), (4.6) liefert jedoch nur diskrete Näherungen an den Zeitpunkten (4.2). Alternativ kann ein *stetiges Runge-Kutta-Verfahren* (SRK-Verfahren) verwendet werden. Andere Bezeichnungen sind *kontinuierliches RK-Verfahren* oder *Verfahren mit dichter Ausgabe*.

**Definition 4.4** Gegeben sei ein (diskretes) RK-Verfahren (4.5), (4.6) für ein AWP (4.1). Bei einem Interpolanten vom ersten Typ ist eine stetige Ausgabe  $\eta(t)$  gegeben durch

$$\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^s b_i(\theta) f(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i)$$

für  $0 \leq \theta \leq 1$ . Die Funktionen  $b_i(\theta)$  sind Polynome, die die Bedingungen

$$b_i(0) = 0 \quad \text{und} \quad b_i(1) = b_i \quad \text{für } i = 1, \dots, s$$

erfüllen.



Mit den Bedingungen an die Polynome folgt sofort

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \eta(t_n + \theta h_{n+1}) &= y_n \\ \lim_{\theta \rightarrow 1^-} \eta(t_n + \theta h_{n+1}) &= y_{n+1}\end{aligned}\tag{4.16}$$

für alle  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ . Dadurch ist die Ausgabefunktion  $\eta : [t_0, t_{\text{end}}] \rightarrow \mathbb{R}^d$  global stetig.

**Definition 4.5** *Gegeben sei ein (diskretes) RK-Verfahren (4.5), (4.6) für ein AWP (4.1). Bei einem Interpolanten vom zweiten Typ ist eine stetige Ausgabe  $\eta(t)$  gegeben durch eine Erweiterung*

$$\begin{aligned}Y_{n+1}^i &= y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^r a_{ij} f(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i) \quad \text{für } i = s + 1, \dots, r \\ \eta(t_n + \theta h_{n+1}) &= y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^r b_i(\theta) f(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i)\end{aligned}$$

für  $0 \leq \theta \leq 1$  mit einem  $r > s$ . Die Funktionen  $b_i(\theta)$  sind Polynome, die die Bedingungen

$b_i(0) = 0$  für  $i = 1, \dots, r$ ,  $b_i(1) = 1$  für  $i = 1, \dots, s$ ,  $b_i(1) = 0$  für  $i = s + 1, \dots, r$  erfüllen.

Auch hier liefern die Bedingungen an die Polynome die Eigenschaft (4.16), d.h. die Ausgabefunktion  $\eta : [t_0, t_{\text{end}}] \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist global stetig.

Sei  $A \in \mathbb{R}^{s \times s}$  die Matrix mit den inneren Gewichten des diskreten RK-Verfahrens. Beim Interpolanten zweiten Typs entsteht eine erweiterte Matrix  $A_{\text{erw}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  aus inneren Gewichten

$$A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A^* & A^{**} \end{pmatrix}$$

mit  $A^* \in \mathbb{R}^{(r-s) \times s}$  und  $A^{**} \in \mathbb{R}^{(r-s) \times (r-s)}$ .

Ein Interpolant ersten Typs oder zweiten Typs liefert jeweils ein SRK-Verfahren. Bei Interpolanten vom ersten oder zweiten Typ gilt im allgemeinen für die Zwischenwerte (4.5)  $Y_{n+1}^i \neq \eta(t_n + c_i h_{n+1})$ .

**Definition 4.6** *Ein SRK-Verfahren heißt natürlich, wenn*

$$b_i(c_j) = a_{ji}\tag{4.17}$$

für  $i, j = 1, \dots, s$  bzw.  $i, j = 1, \dots, r$  gilt.

**Satz 4.2** *Ein SRK-Verfahren ist genau dann natürlich, wenn bei allen AWPen  $Y_{n+1}^i = \eta(t_n + c_i h_{n+1})$  für  $i = 1, \dots, s$  bzw.  $i = 1, \dots, r$  gilt.*

Beweis:

O.E.d.A. betrachten wir einen Interpolanten vom zweiten Typ.

„ $\Rightarrow$ “: Sei die Bedingung (4.17) erfüllt. Es folgt

$$\begin{aligned} \eta(t_n + c_j h_{n+1}) &= y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^r b_i(c_j) f(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i) \\ &= y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^r a_{ji} f(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i) = Y_{n+1}^j \end{aligned}$$

für  $j = 1, \dots, r$ .

„ $\Leftarrow$ “: Sei umgekehrt  $Y_{n+1}^j = \eta(t_n + c_j h_{n+1})$  für  $j = 1, \dots, r$ . Es folgt durch Subtraktion und Division durch  $h_{n+1}$

$$\sum_{i=1}^r (b_i(c_j) - a_{ji}) f(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i) = 0.$$

Wir wählen  $f(t, y) = L_k(t)$  mit dem  $k$ -ten Lagrange-Basispolynom zu den Stützstellen  $t_{n+1}^1, \dots, t_{n+1}^r$ . (Bei mehrfachen Knoten verwende eine reduzierte Stützstellenmenge.) Es folgt  $b_k(c_j) - a_{jk} = 0$  für  $k = 1, \dots, r$ .  $\square$

## Konsistenz und Konvergenz

SRK-Verfahren besitzen eine eigene Konsistenzordnung für die gesamte Ausgabefunktion.

**Definition 4.7** *Ein Interpolant vom ersten Typ oder vom zweiten Typ, siehe Definition 4.4 und Definition 4.5, heißt konsistent mit gleichmäßiger Ordnung  $q$ , wenn  $q \geq 1$  die größte ganze Zahl ist, so dass für alle rechte Seiten  $f \in C^q$  bei den lokalen AWPen (4.13) gilt*

$$\max_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} \|z_{n+1}(t) - \eta(t)\| = \mathcal{O}(h_{n+1}^{q+1})$$

für alle  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Für ein SRK-Verfahren dieser Art gilt folgende Konvergenzaussage.

**Satz 4.3** Gegeben sei ein Interpolant ersten oder zweiten Typs, der konsistent mit gleichmäßiger Ordnung  $q$  ist. Sei das zugehörige (diskrete) RK-Verfahren konsistent mit Ordnung  $p$ . Dann gilt im SRK-Verfahren

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_{\text{end}}} \|y(t) - \eta(t)\| = \mathcal{O}(h^{\bar{q}})$$

mit der Ordnung  $\bar{q} = \min\{p, q + 1\}$  und der maximalen Schrittweite (4.15).

**Definition 4.8** Ein (diskretes) RK-Verfahren (4.5), (4.6) mit Konsistenzordnung  $p$  heißt superkonvergent, wenn für jeden Interpolanten ersten Typs, siehe Definition 4.4, mit gleichmäßiger Konsistenzordnung  $q$  gilt  $q < p$ .

### Ordnungsbedingungen

Wir schreiben einen Interpolanten ersten Typs um in die Formel eines RK-Verfahrens mit Schrittweite  $\tilde{h}_{n+1} = \theta h_{n+1}$ . Für  $\theta > 0$  gilt

$$Y_{n+1}^i = y_n + \theta h_{n+1} \sum_{j=1}^s \frac{a_{ij}}{\theta} f(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i) \quad \text{für } i = 1, \dots, s$$

$$\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = y_n + \theta h_{n+1} \sum_{i=1}^s \frac{b_i(\theta)}{\theta} f(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i).$$

Die Forderung (4.10) kann einfach durch  $\theta$  dividiert werden. Die Koeffizienten  $\frac{a_{ij}}{\theta}$ ,  $\frac{b_i(\theta)}{\theta}$ ,  $\frac{c_i}{\theta}$  können in die Konsistenzbedingungen aus Abschnitt 4.1 eingesetzt werden. Es folgen für einen Interpolanten ersten Typs die Konsistenzbedingungen bis Ordnung  $p = 4$ :

$p = 1 :$	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) = \theta$	$p = 4 :$	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^3 = \frac{1}{4} \theta^4$
$p = 2 :$	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i = \frac{1}{2} \theta^2$		$\sum_{i,j=1}^s b_i(\theta) a_{ij} c_i c_j = \frac{1}{8} \theta^4$
$p = 3 :$	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^2 = \frac{1}{3} \theta^3$		$\sum_{i,j=1}^s b_i(\theta) a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12} \theta^4$
	$\sum_{i,j=1}^s b_i(\theta) a_{ij} c_j = \frac{1}{6} \theta^3$		$\sum_{i,j,\ell=1}^s b_i(\theta) a_{ij} a_{j\ell} c_\ell = \frac{1}{24} \theta^4$

Bei einem Interpolanten zweiten Typs gelten die analogen Ordnungsbedingungen mit Summen bis  $r$ .

Bei einem Interpolanten ersten Typs sind alle Koeffizienten  $a_{ij}$  und  $c_i$  bereits durch das zugehörige (diskrete) RK-Verfahren gegeben. Für die Gewichte  $b_i$  werden dann Polynome vom Grad (höchstens)  $\nu$  angesetzt, d.h.

$$b_i(\theta) = \beta_{i,0} + \beta_{i,1}\theta + \beta_{i,2}\theta^2 + \cdots + \beta_{i,\nu}\theta^\nu$$

für  $i = 1, \dots, s$ . Es gilt  $\beta_{i,0} = 0$  wegen der Bedingung  $b_i(0) = 0$  für  $i = 1, \dots, s$ . Dieser Ansatz kann in die Ordnungsbedingungen eingesetzt werden. Somit können die Koeffizienten  $\beta_{i,j}$  bestimmt werden.

**Beispiel 4.1** Wir betrachten das explizite Euler-Verfahren (4.11), welches die Stufenzahl  $s = 1$  und die Konsistenzordnung  $p = 1$  besitzt. Es gilt  $a_{11} = 0$ ,  $b_1 = 1$ . Für ein SRK-Verfahren liefert die Ordnungsbedingung für  $p = 1$  direkt das Polynom

$$b_1(\theta) = \theta.$$

Die Bedingungen  $b_1(0) = 0$  und  $b_1(1) = 1$  sind auch erfüllt. Die Ordnungsbedingung für  $p = 2$  gilt nicht, da

$$b_1(\theta)c_1 = \theta \cdot 0 = 0 \neq \frac{1}{2}\theta^2.$$

Also ist die gleichmäßige Konsistenzordnung  $q = 1$  im SRK-Verfahren. Die Funktion  $\eta$  ist hier global ein Polygonzug.

**Beispiel 4.2** Die Trapezregel besitzt die Stufenzahl  $s = 2$  und die Konsistenzordnung  $p = 2$ . Es gilt  $a_{11} = a_{12} = 0$ ,  $a_{21} = a_{22} = \frac{1}{2}$ . Als Polynome wird angesetzt

$$b_1(\theta) = -\frac{1}{2}\theta(\theta - 2) \quad \text{und} \quad b_2(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2.$$

Offensichtlich gilt  $b_1(0) = b_2(0) = 0$  und  $b_1(1) = b_2(1) = \frac{1}{2}$ . Wir überprüfen die Ordnungsbedingungen

$$\begin{aligned} p = 1 : \quad & b_1(\theta) + b_2(\theta) = -\frac{1}{2}\theta^2 + \theta + \frac{1}{2}\theta^2 = \theta \\ p = 2 : \quad & c_1 b_1(\theta) + c_2 b_2(\theta) = 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\theta(\theta - 2)\right) + 1 \cdot \frac{1}{2}\theta^2 = \frac{1}{2}\theta^2. \end{aligned}$$

Die Ordnungsbedingung für  $p = 3$  kann nicht erfüllt sein, da eine Linearkombination der beiden Polynome  $b_1(\theta), b_2(\theta)$  nur vom Grad 2 ist. Damit ist dieses SRK-Verfahren gleichmäßig konsistent mit Ordnung  $q = 2$ .

**Satz 4.4** Für einen Interpolanten vom ersten oder zweiten Typ mit gleichmäßiger Ordnung  $q$  muss mindestens ein Polynom  $b_i(\theta)$  einen Grad  $\nu \geq q$  besitzen.

Beweis:

Die Bedingungen für eine Ordnung  $q$  sind von der Gestalt

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i b_i(\theta) = \gamma \theta^q$$

mit  $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{R}$  und  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Die linke Seite ist somit eine Linearkombination der Polynome  $b_i(\theta)$ . Eine solche Bedingung kann also nur erfüllt sein, wenn mindestens ein Polynom einen Grad  $\geq q$  hat.  $\square$

Der nachfolgende Satz zeigt, dass Polynomgrade  $\nu = q$  ausreichend sind.

**Satz 4.5** *Ein (diskretes) RK-Verfahren (4.5), (4.6) habe eine stetige Ausgabe  $\eta(t)$  der gleichmäßigen Ordnung  $q$  und Polynomgrad  $\nu > q$ . Dann gibt es eine andere stetige Ausgabe  $\tilde{\eta}(t)$  mit gleichmäßiger Ordnung  $q$  und Polynomgrad  $q$ .*

**Bemerkung 4.1** *In der Situation von Satz 4.5 ist es auch vorteilhaft, den Polynomgrad  $q$  zu verwenden. Anderenfalls kann in den höheren Ableitungen  $\eta^{(k)}$  für  $q < k \leq \nu$  bei den Gitterpunkten  $t_n$  im Grenzfall  $h \rightarrow 0$  ein kritisches Verhalten auftreten.*

**Satz 4.6** *Gibt es zu einem (diskreten) RK-Verfahren (4.5), (4.6) einen Interpolanten ersten Typs mit gleichmäßiger Ordnung  $q \geq 2$ , dann existiert auch ein Interpolant mit der gleichmäßigen Ordnung  $\tilde{q} \in \{1, 2, \dots, q - 1\}$ .*

**Satz 4.7** *Zu jedem (diskreten) RK-Verfahren (4.5), (4.6) mit Ordnung  $p \geq 1$  gibt es einen Interpolanten ersten Typs mit gleichmäßiger Ordnung  $q$  für alle  $q = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$ .*

Dieser Satz schließt nicht aus, dass Interpolanten ersten Typs mit höherer Ordnung existieren können, was Beispiel 4.2 zeigt. Dies gilt auch für explizite RK-Verfahren.

Tabelle 5 zeigt die minimale Stufenzahl  $s$ , die benötigt wird, damit ein Interpolant ersten Typs mit einer Ordnung  $q$  zu einem expliziten RK-Verfahren existiert. Für  $q \geq 7$  ist die minimal benötigte Stufenzahl  $s \geq 2q - 2$ .

Tabelle 5: Ordnung und minimale Stufenzahl bei expliziten SRK-Verfahren.

Ordnung $p$ bzw. $q$	1	2	3	4	5	6	7	8
Stufenzahl in RK	1	2	3	4	6	7	9	11
Stufenzahl in SRK	1	2	4	6	8	11	$\geq 12$	$\geq 14$

**Beispiel 4.3** Wir betrachten das klassische Runge-Kutta-Verfahren, siehe Tabelle 2. Die Stufenzahl und die diskrete Konsistenzordnung sind  $s = p = 4$ . Ein zugehöriger Interpolant ersten Typs ist gegeben durch die Polynome

$$\begin{aligned} b_1(\theta) &= \left(\frac{2}{3}\theta^2 - \frac{3}{2}\theta + 1\right)\theta \\ b_2(\theta) = b_3(\theta) &= \left(-\frac{2}{3}\theta + 1\right)\theta^2 \\ b_3(\theta) &= \left(\frac{2}{3}\theta - \frac{1}{2}\right)\theta^2. \end{aligned}$$

Die gleichmäßige Konsistenzordnung dieses SRK-Verfahrens ist  $q = 3$ .

Mehr zu SRK-Verfahren kann in Abschnitt II.6 aus [9] gefunden werden.

### 4.3 Verfahren für verzögerte Differentialgleichungen

Die Schritte-Methode soll zur numerischen Lösung von AWPen zu verzögerten Dgln. eingesetzt werden. Dabei sollen RK-Verfahren die entstehenden gewöhnlichen Dgln. numerisch lösen. Bei diesem Ansatz entstehen zunächst die folgenden drei Schwierigkeiten.

**Problem 1:** In einem Integrationsschritt von  $t_n$  zu  $t_{n+1}$  werden Lösungswerte  $y(t)$  für manche frühere Zeiten  $t < t_n$  benötigt.

**Problem 2:** Bei größeren Schrittweiten  $h_{n+1}$  werden auch Lösungswerte  $y(t)$  für manche  $t_n < t < t_{n+1}$  benötigt.

**Problem 3:** Die exakte Lösung  $y$  besitzt typischerweise Unstetigkeiten in ihren höheren Ableitungen bei bestimmten diskreten Zeitpunkten.

Das Problem 1 kann behoben werden, indem ein SRK-Verfahren aus Abschnitt 4.2 verwendet wird.

Wir betrachten ein AWP der Gestalt

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))))), & t_0 \leq t \leq t_{\text{end}} \\ y(t) = \phi(t), & -\infty < t \leq t_0 \end{cases} \quad (4.18)$$

mit der Lösung  $y : [t_0, t_{\text{end}}] \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Die Verzögerung  $\tau$  kann von der Zeit und/oder der Lösung abhängen. Zugehörige lokale AWPen lauten

$$\begin{cases} z'_{n+1}(t) = f(t, z_{n+1}(t), u(t - \tau(t, z_{n+1}(t))))), & t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ z_{n+1}(t_n) = y_n, \end{cases} \quad (4.19)$$

mit

$$u(s) = \begin{cases} \phi(s) & \text{falls } s \leq t_0 \\ \eta(s) & \text{falls } t_0 \leq s \leq t_n \\ z_{n+1}(s) & \text{fallst } t_n \leq s \leq t_{n+1}. \end{cases}$$

Darin ist  $\eta$  die kontinuierliche Näherung aus einem SRK-Verfahren. Eine Schwierigkeit ist natürlich, dass im dritten Fall  $z_{n+1}$  noch unbekannt ist.

### Konstruktion des Verfahrens

Die Anwendung eines SRK-Verfahrens auf das AWP (4.18) führt auf den Integrationsschritt

$$Y_{n+1}^i = y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_{n+1}^j, Y_{n+1}^j, \eta(t_{n+1}^j - \tau(t_{n+1}^j, Y_{n+1}^j))), \quad i = 1, \dots, s$$

$$\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^s b_i(\theta) f(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i, \eta(t_{n+1}^i - \tau(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i)))$$

mit  $0 \leq \theta \leq 1$ . Es ist  $t_{n+1}^i = t_n + c_i h_{n+1}$ . Wir setzen  $0 \leq c_i \leq 1$  für  $i = 1, \dots, s$  voraus, was meistens gegeben ist. Falls mit einer Konstante  $\tau_0$

$$\tau(t, y) \geq \tau_0 > 0 \quad \text{für } t_0 \leq t \leq t_{\text{end}}, y \in \mathbb{R}^d$$

gilt, dann folgt aus  $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n \leq \tau_0$

$$t - \tau(t, y) \leq t_n \quad \text{für } t_n \leq t \leq t_{n+1}.$$

Mit dieser Schrittweitenrestriktion wird somit das Problem 2 vermieden. Jedoch sind dann möglicherweise sehr viele Integrations Schritte notwendig.

Im Fall  $t_{n+1}^i - \tau(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i) > t_n$  tritt das Problem 2 auf, da die Funktion  $\eta$  noch nicht bestimmt ist. Für diesen Fall führen wir eine uneigentliche Stufe ein

$$\tilde{Y}_{n+1}^i = \eta(t_{n+1}^i - \tau(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i)). \quad (4.20)$$

Die zugehörige Stelle  $\theta > 0$  ist dann

$$\theta_{n+1}^i = c_i - \frac{\tau(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i)}{h_{n+1}}. \quad (4.21)$$

Als Abkürzung definieren wir die beiden Fälle

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(n, i) &: t_{n+1}^i - \tau(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i) > t_n, \\ \mathcal{F}_2(n, i) &: t_{n+1}^i - \tau(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i) \leq t_n.\end{aligned}$$

Es ergibt sich das Verfahren

$$\begin{aligned}Y_{n+1}^i &= y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^s a_{ij} f\left(t_{n+1}^j, Y_{n+1}^j, \tilde{Y}_{n+1}^j\right), \quad i = 1, \dots, s \\ \eta(t_n + \theta h_{n+1}) &= y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^s b_i(\theta) f\left(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i, \tilde{Y}_{n+1}^i\right), \quad 0 \leq \theta \leq 1\end{aligned}\tag{4.22}$$

mit

$$\tilde{Y}_{n+1}^i = \begin{cases} y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^s b_j(\theta_{n+1}^i) f\left(t_{n+1}^j, Y_{n+1}^j, \tilde{Y}_{n+1}^j\right) & \text{falls } \mathcal{F}_1(n, i), \\ \eta\left(t_{n+1}^i - \tau(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i)\right) & \text{falls } \mathcal{F}_2(n, i). \end{cases}\tag{4.23}$$

Hier werden also zusätzliche Unbekannte  $\tilde{Y}_{n+1}^i$  eingeführt. Das RK-Verfahren wird damit implizit, auch wenn es ursprünglich explizit ist.

Wir schreiben dieses Verfahren in der K-Notation mit den Inkrementen

$$K_{n+1}^i = f\left(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i, \tilde{Y}_{n+1}^i\right) \quad \text{für } i = 1, \dots, s.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}K_{n+1}^i &= f\left(t_{n+1}^i, y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^s a_{ij} K_{n+1}^j, \tilde{Y}_{n+1}^i\right), \quad i = 1, \dots, s \\ \eta(t_n + \theta h_{n+1}) &= y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^s b_i(\theta) K_{n+1}^i, \quad 0 \leq \theta \leq 1\end{aligned}$$

mit

$$\tilde{Y}_{n+1}^i = \begin{cases} y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^s b_j \left( c_i - \frac{1}{h_{n+1}} \tau\left(t_{n+1}^i, y_n + h_{n+1} \sum_{\ell=1}^s a_{i\ell} K_{n+1}^\ell\right) \right) K_{n+1}^j & \text{falls } \mathcal{F}_1(n, i), \\ \eta\left(t_{n+1}^i - \tau\left(t_{n+1}^i, y_n + h_{n+1} \sum_{\ell=1}^s a_{i\ell} K_{n+1}^\ell\right)\right) & \text{falls } \mathcal{F}_2(n, i). \end{cases}$$



**Bemerkung 4.2** Ist zudem ein natürliches SRK-Verfahren gegeben (siehe Definition 4.6), dann gilt  $Y_{n+1}^i = \eta(t_n + c_i h_{n+1})$  für  $i = 1, \dots, s$ . Es gilt immer  $y_n = \eta(t_n)$ . Liegt ein Interpolant vom ersten Typ mit Polynomgrad  $s$  vor, dann erhalten wir die Darstellung

$$\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = L_0(\theta)y_n + \sum_{i=1}^s L_i(\theta)Y_{n+1}^i \quad (4.24)$$

für  $0 \leq \theta \leq 1$  mit den Lagrange-Basispolynomen zu den Knoten  $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_s \leq 1$ . Eine unbekannte uneigentliche Stufe  $\tilde{Y}_{n+1}^i$  (4.20) kann somit durch (4.24) eliminiert werden unter Verwendung von (4.21).

## Konvergenz

Zunächst zeigen wir ein technisches Lemma.

**Lemma 4.1** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit  $a_0 = 0$  und  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge positiver reeller Zahlen, für die gilt

$$a_{n+1} \leq e^{ch_{n+1}} a_n + h_{n+1}d$$

für alle  $n \geq 0$  mit Konstanten  $c, d > 0$ . Dann folgt

$$a_n \leq d \sum_{i=1}^n e^{c(h_{i+1} + \dots + h_n)} h_i$$

für alle  $n \geq 1$ . Hier gilt  $h_{i+1} + \dots + h_n = 0$  falls  $i \geq n$ .

Beweis:

Wir verwenden vollständige Induktion.

Induktionsanfang  $n = 1$ :  $a_1 \leq e^{ch_1} a_0 + h_1 d = d h_1$

Induktionsschritt  $n \rightarrow n + 1$ :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq e^{ch_{n+1}} a_n + h_{n+1}d \leq e^{ch_{n+1}} d \left( \sum_{i=1}^n e^{c(h_{i+1} + \dots + h_n)} h_i \right) + h_{n+1}d \\ &= d \left( \sum_{i=1}^n e^{c(h_{i+1} + \dots + h_{n+1})} h_i \right) + h_{n+1}d = d \sum_{i=1}^{n+1} e^{c(h_{i+1} + \dots + h_{n+1})} h_i \end{aligned}$$

Damit ist die Formel gezeigt. □

**Definition 4.9** Sei  $\Omega = [t_0, t_{\text{end}}] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ . Eine rechte Seite  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $(t, y, z) \mapsto f(t, y, z)$  erfüllt die Bedingung der globalen Lipschitz-Stetigkeit, wenn  $f$  stetig in  $t$  ist und

$$\|f(t, y, z) - f(t, \tilde{y}, z)\| \leq L_y \|y - \tilde{y}\| \quad \text{für } (t, y, z), (t, \tilde{y}, z) \in \Omega$$

$$\|f(t, y, z) - f(t, y, \tilde{z})\| \leq L_z \|z - \tilde{z}\| \quad \text{für } (t, y, z), (t, y, \tilde{z}) \in \Omega$$

mit Konstanten  $L_y, L_z > 0$  gilt.

Das nächste Lemma beinhaltet eine gewisse Lipschitz-Stetigkeit der numerischen Lösungen.

**Lemma 4.2** Die Funktion  $f : [t_0, t_{\text{end}}] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  erfülle die globale Lipschitz-Bedingung. Es bezeichnet  $\zeta(t)$  und  $\eta(t)$  jeweils die numerischen Lösungen der AWPe

$$\begin{cases} z'_{n+1}(t) = f(t, z_{n+1}(t), u(t - \tau(t, z_{n+1}(t)))) & t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ z_{n+1}(t_n) = z_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} w'_{n+1}(t) = f(t, w_{n+1}(t), v(t - \tau(t, w_{n+1}(t)))) & t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ w_{n+1}(t_n) = w_n \end{cases}$$

aus einem SRK-Verfahren. Dann gibt es eine Schrittweite  $\bar{h} > 0$  und Konstanten  $P, Q > 0$ , so dass

$$\max_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} \|\zeta(t) - \eta(t)\| \leq (1 + h_{n+1}Q) \|z_n - w_n\| + h_{n+1}P \sup_{-\infty < t \leq t_{n+1}} \|u(t) - v(t)\|$$

für  $h_{n+1} \leq \bar{h}$  gilt.

Beweis:

i) Ein SRK-Verfahren für eine gewöhnliche Dgl.  $y' = f(t, y)$  kann beschrieben werden durch

$$\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = y_n + h_{n+1} \Psi(t_n, y_n, h_{n+1}, \theta; f)$$

mit der Inkrementfunktion (auch: Verfahrensfunktion)

$$\Psi(t_n, y_n, h_{n+1}, \theta; f) = \sum_{i=1}^s b_i(\theta) f(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i).$$

Ist  $f$  global Lipschitz-stetig, dann gibt es Konstanten  $\bar{h}_f > 0$  und  $Q_f > 0$ , so dass

$$\|\Psi(t_n, y_n, h_{n+1}, \theta; f) - \Psi(t_n, \tilde{y}_n, h_{n+1}, \theta; f)\| \leq Q_f \|y_n - \tilde{y}_n\|$$

für alle  $t_n \in [t_0, t_{\text{end}}]$ ,  $y_n, \tilde{y}_n \in \mathbb{R}^d$ ,  $h_{n+1} \leq \bar{h}_f$ ,  $\theta \in [0, 1]$ .

Ist  $f$  global Lipschitz-stetig, dann gibt es Konstanten  $\bar{\bar{h}}_f > 0$  und  $R_f > 0$ , so dass

$$\|\Psi(t_n, y_n, h_{n+1}, \theta; f) - \Psi(t_n, y_n, h_{n+1}, \theta; \tilde{f})\| \leq R_f \sup_{t_n \leq t \leq t_{n+1}, y \in \mathbb{R}^d} \|f(t, y) - \tilde{f}(t, y)\|$$

für alle  $t_n \in [t_0, t_{\text{end}}]$ ,  $h_{n+1} \leq \bar{\bar{h}}_f$ ,  $\theta \in [0, 1]$  und jede andere rechte Seite  $\tilde{f}$ , siehe Proposition 5.1.2 in [3].

ii) Subtraktion entsprechenden Formeln für die SRK-Verfahren zu den beiden lokalen AWPen der verzögerten Dgln. liefert

$$\begin{aligned} & \|\zeta(t_n + \theta h_{n+1}) - \eta(t_n + \theta h_{n+1})\| \\ & \leq \|z_n - w_n\| + h_{n+1} \|\Psi(t_n, z_n, h_{n+1}, \theta; f_u) - \Psi(t_n, w_n, h_{n+1}, \theta; f_v)\|. \end{aligned}$$

Darin ist  $f_g(t, y) = f(t, y, g(t - \tau(t, y)))$  für  $g \in \{u, v\}$ . Es gibt Konstanten  $\bar{h} > 0$  und  $Q, R > 0$ , so dass für  $h_{n+1} \leq \bar{h}$  gilt

$$\begin{aligned} & \|\Psi(t_n, z_n, h_{n+1}, \theta; f_u) - \Psi(t_n, w_n, h_{n+1}, \theta; f_v)\| \\ & \leq \|\Psi(t_n, z_n, h_{n+1}, \theta; f_u) - \Psi(t_n, w_n, h_{n+1}, \theta; f_u)\| \\ & \quad + \|\Psi(t_n, w_n, h_{n+1}, \theta; f_u) - \Psi(t_n, w_n, h_{n+1}, \theta; f_v)\| \\ & \leq Q \|z_n - w_n\| + RL \sup_{t_n \leq t \leq t_{n+1}, y \in \mathbb{R}^d} \|u(t - \tau(t, y)) - v(t - \tau(t, y))\| \end{aligned}$$

mit der Lipschitz-Konstante  $L$  bezüglich  $f(t, y, \cdot)$ . Da  $\tau(t, y) \geq 0$  vorliegt, kann  $P = RL$  gesetzt werden.  $\square$

Nun zeigen wir das Hauptresultat bezüglich der Konvergenz des Verfahrens.

**Satz 4.8** *Gegeben sei ein AWP (4.18) mit  $f \in C^p$  in  $[t_0, t_{\text{end}}] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , einer Anfangsfunktion  $\phi \in C^p$  und einer Verzögerung  $\tau \in C^p$  in  $[t_0, t_{\text{end}}] \times \mathbb{R}^d$ . Die Gitterpunkte  $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  sollen alle Unstetigkeitsstellen der Ordnung  $\leq p$  in  $[t_0, t_{\text{end}}]$  enthalten. Wenn das zugehörige SRK-Verfahren die diskrete Ordnung  $p$  und die gleichmäßige Ordnung  $q$  besitzt, dann ist das Verfahren (4.22), (4.23) konvergent mit diskreter Ordnung und gleichmäßiger Ordnung  $\bar{q} = \min\{p, q + 1\}$ , d.h.*

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|y(t_n) - y_n\| = \mathcal{O}(h^{\bar{q}}) \quad \text{und} \quad \max_{t_0 \leq t \leq t_{\text{end}}} \|y(t) - \eta(t)\| = \mathcal{O}(h^{\bar{q}})$$

mit der maximalen Schrittweite  $h = \max\{h_1, \dots, h_N\}$ .

Beweis:

i) Wir betrachten die lokalen AWPe

$$\begin{cases} z'_{n+1}(t) = f(t, z_{n+1}(t), y(t - \tau(t, z_{n+1}(t))))), & t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ z_{n+1}(t_n) = y(t_n), \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_0 \end{cases} \quad (4.25)$$

für  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ . Offensichtlich gilt  $z_{n+1}(t) = y(t)$  mit der Lösung des AWPes (4.18). Desweiteren führen wir lokale Hilfsprobleme ein durch

$$\begin{cases} w'_{n+1}(t) = f(t, w_{n+1}(t), \eta(t - \tau(t, w_{n+1}(t))))), & t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ w_{n+1}(t_n) = \eta(t_n), \\ \eta(t) = \phi(t), & t \leq t_0 \end{cases} \quad (4.26)$$

für  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  mit der stetigen Näherung  $\eta(t)$  für  $t \leq t_{n+1}$  aus dem numerischen Verfahren. Es liegen hier gewöhnliche Dgln. vor.

ii) Wir wenden Lemma 4.2 an mit  $u(t) = y(t)$ ,  $v(t) = \eta(t)$ ,  $z_n = y(t_n)$ ,  $w_n = \eta(t_n)$ . Für  $h \leq \bar{h}$  genügen die Lösungen  $\zeta$  und  $\eta$  aus (4.25) bzw. (4.26) der Abschätzung

$$\max_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} \|\zeta(t) - \eta(t)\| \leq (1 + h_{n+1}Q)\|y(t_n) - \eta(t_n)\| + h_{n+1}P \max_{t \leq t_{n+1}} \|y(t) - \eta(t)\|$$

(Supremum wird zum Maximum, da  $y(t) = \eta(t)$  für  $t \leq 0$ ). Desweiteren gilt

$$\|y(t_{n+1}) - \eta(t_{n+1})\| \leq \|y(t_{n+1}) - \zeta(t_{n+1})\| + \|\zeta(t_{n+1}) - \eta(t_{n+1})\|.$$

Da die Unstetigkeitsstellen der Ordnung  $\leq p$  stets in den Gitterpunkten enthalten sind, ist die Lösung  $z_{n+1}$  von (4.25) hinreichend glatt in  $[t_n, t_{n+1}]$ . Da das Verfahren die diskrete Ordnung  $p$  besitzt, folgt

$$\begin{aligned} \|y(t_{n+1}) - \eta(t_{n+1})\| &\leq Mh_{n+1}^{p+1} + (1 + h_{n+1}Q)\|y(t_n) - \eta(t_n)\| \\ &\quad + h_{n+1}P \sup_{t \leq t_{n+1}} \|y(t) - \eta(t)\| \end{aligned}$$

mit einer Konstanten  $M > 0$ . Es sei

$$e_n = \max_{i \leq n} \|y(t_i) - \eta(t_i)\| \quad \text{und} \quad E_n = \max_{t \leq t_n} \|y(t) - \eta(t)\|$$

für  $n = 0, 1, \dots, N$ . Damit folgt

$$\|y(t_{n+1}) - \eta(t_{n+1})\| \leq Mh_{n+1}^{p+1} + (1 + h_{n+1}Q)e_n + h_{n+1}PE_{n+1}$$

und, da die Folgen  $(e_n)$  und  $(E_n)$  monoton steigend sind, auch

$$e_{n+1} \leq Mh_{n+1}^{p+1} + (1 + h_{n+1}Q)e_n + h_{n+1}PE_{n+1}$$

für  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ . Bezüglich der Interpolanten erhalten wir

$$\max_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} \|y(t) - \eta(t)\| \leq \max_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} \|y(t) - \zeta(t)\| + \max_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} \|\zeta(t) - \eta(t)\|.$$

Mit der Glattheit der Lösung  $z_{n+1}$  und der gleichmäßigen Ordnung  $q$  des Verfahrens folgt

$$\begin{aligned} \max_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} \|y(t) - \eta(t)\| &\leq Mh_{n+1}^{q+1} + (1 + h_{n+1}Q)\|y(t_n) - \eta(t_n)\| \\ &\quad + h_{n+1}P \max_{t \leq t_{n+1}} \|y(t) - \eta(t)\| \\ &\leq Mh_{n+1}^{q+1} + (1 + h_{n+1}Q)e_n + h_{n+1}PE_{n+1} \end{aligned}$$

für  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  mit der Konstante  $M > 0$  wie zuvor. Mit neuer Konstante  $R = \max\{M, P, Q, 1\}$  ergeben sich die Ungleichungen

$$\begin{aligned} e_{n+1} &\leq (1 + h_{n+1}R)e_n + h_{n+1}RE_{n+1} + h_{n+1}Rh^p \\ \max_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} \|y(t) - \eta(t)\| &\leq (1 + hR)e_n + hRE_{n+1} + Rh^{q+1} \end{aligned}$$

für  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  mit der maximalen Schrittweite  $h$ . Damit folgt auch

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_{n+1}} \|y(t) - \eta(t)\| = \max_{t_{n^*} \leq t \leq t_{n^*+1}} \|y(t) - \eta(t)\| \leq (1 + hR)e_{n^*} + hRE_{n^*+1} + Rh^{q+1}$$

mi einem  $n^* \leq n$ .

Wir nehmen an, dass  $h \leq \min\{1, \frac{1}{2R}, \bar{h}\}$  gilt. Dadurch ist  $\frac{1}{2} \leq 1 - hR \leq 1$  sowie  $1 + hR \leq 1 + R \leq 2R$ . Da die Folgen  $(e_n)$  und  $(E_n)$  monoton steigend sind, erhalten wir

$$E_{n+1} \leq 2Re_n + hRE_{n+1} + Rh^{q+1}$$

und somit

$$E_{n+1} \leq \frac{2R}{1 - hR} e_n + \frac{R}{1 - hR} h^{q+1}$$

für  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ .

iii) Mit  $S = R + 4R^2$  ergibt sich zusammen

$$\begin{aligned} e_{n+1} &\leq \left(1 + h_{n+1} \left(R + \frac{2R^2}{1 - hR}\right)\right) e_n + h_{n+1} \left(R + \frac{R^2}{1 - hR}\right) h^{\bar{q}} \\ &\leq (1 + Sh_{n+1})e_n + h_{n+1}Sh^{\bar{q}} \\ &\leq e^{Sh_{n+1}}e_n + h_{n+1}Sh^{\bar{q}} \end{aligned}$$

für  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ . Zudem ist  $e_0 = 0$ . Dadurch können wir Lemma 4.1 anwenden mit  $c = S$  und  $d = Sh^{\bar{q}}$ . Benötigt wird nur der Fall  $n = N$

$$e_N \leq Sh^{\bar{q}} \sum_{i=1}^N e^{S(h_{i+1} + \dots + h_N)} h_i \leq Sh^{\bar{q}} e^{S(t_{\text{end}} - t_0)} \sum_{i=1}^N h_i = Se^{S(t_{\text{end}} - t_0)} (t_{\text{end}} - t_0) h^{\bar{q}}.$$

Damit erhalten wir auch

$$E_N \leq \frac{2R}{1-hR} e_{N-1} + \frac{R}{1-hR} h^{q+1} \leq 4Re_N + 2Rh^{q+1} = \mathcal{O}(h^{\bar{q}}) + \mathcal{O}(h^{q+1}) = \mathcal{O}(h^{\bar{q}}).$$

Also sind die Konvergenzen mit Ordnung  $\bar{q}$  nachgewiesen.  $\square$

**Bemerkung 4.3** Bei Satz 4.8 wird eine Konsistenz gleichmäßig in einem Streifen  $[t_0, t_{\text{end}}] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  vorausgesetzt. Diese Eigenschaft ist bei einigen Dgln. nicht gegeben. Mit einer modifizierten Beweistechnik kann ein kompakter Bereich  $\hat{\Omega} = [t_0, t_{\text{end}}] \times [-r, r]^d \times [-r, r]^d$  ( $r > 0$ ) verwendet werden, wo die Konsistenz gleichmäßig gilt, vergleiche Satz 7.2.2.3 in [22]. Analog kann dann auch die globale Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seite  $f$ , siehe Definition 4.9, zu einer Lipschitz-Stetigkeit auf  $\hat{\Omega}$  abgeschwächt werden, wofür  $f \in C^1$  bereits hinreichend ist.

### Detektion der Unstetigkeitsstellen

Um Problem 3 zu berücksichtigen wurde in Satz 4.8 angenommen, dass alle relevanten Unstetigkeitsstellen der Lösung in der Menge der Gitterpunkte  $\Delta$  enthalten sind. In der Praxis müssen hierzu die Unstetigkeitsstellen während der Zeitintegration bestimmt werden.

**Definition 4.10** *Eine Funktion  $y$  besitzt bei  $\xi$  eine Unstetigkeitsstelle der Ordnung  $k$ , wenn es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass  $y$  dann  $k$ -mal stetig differenzierbar in  $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ ,  $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar in  $(\xi - \varepsilon, \xi)$  sowie  $(\xi, \xi + \varepsilon)$  ist und die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von  $y^{(k+1)}$  bei  $\xi$  existieren aber verschieden sind.*

Nach Definition sind diese Unstetigkeitsstellen isoliert.

Bei Anwendung eines SRK-Verfahrens mit diskreter Ordnung  $p$  sind Unstetigkeitsstellen der Ordnung  $\geq p+1$  irrelevant, denn es gilt dort  $y \in C^{p+1}$ . Umgekehrt müssen Unstetigkeitsstellen  $\xi$  der Ordnung  $\leq p$  berücksichtigt werden. Zusätzlich (zu Definition 4.10) benötigt, dass die Grenzwerte

$$\lim_{t \rightarrow \xi^+} y^{(\ell)}(t) \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \xi^-} y^{(\ell)}(t) \quad \text{für } \ell = 1, \dots, p+1$$

existieren. Desweiteren soll bei benachbarten Unstetigkeitsstellen  $\xi < \xi^*$  der Ordnung  $\leq p$  gelten, dass  $y \in C^{p+1}(\xi, \xi^*)$ . Dies ist bei Lösungen von verzögerten Dgln. mit rechter Seite  $f \in C^p$  typischerweise gegeben.

Liegt eine verzögerte Dgl. mit einer konstanten Verzögerung  $\tau$  vor, dann entstehen Unstetigkeitsstellen nur bei  $t_0 + k\tau$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Bei  $\xi_k = t_0 + k\tau$  liegt eine

Ordnung  $k$  vor, d.h. die Ordnung nimmt zu. Unter der Schrittweitenrestriktion  $h_{n+1} \leq \tau$  kann ein AWP über die Schritte-Methode sukzessive in Intervallen  $[t_0 + k\tau, t_0 + (k+1)\tau]$  numerisch gelöst werden. Dadurch ist die Voraussetzung in Satz 4.8 erfüllt. Wird eine Methode der Ordnung  $p$  verwendet, dann kann für  $t > t_0 + p\tau$  die Schrittweitenrestriktion aufgehoben werden.

Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall. Liegt bei  $\xi_{\ell-1}$  eine Unstetigkeitsstelle der Ordnung  $k$  vor, dann verursacht dies bei  $\xi_\ell$  eine Unstetigkeitsstelle der Ordnung  $k+1$ . Dabei gilt

$$\xi_\ell - \tau(\xi_\ell, y(\xi_\ell)) = \xi_{\ell-1}.$$

Zum numerischen Verfahren betrachten wir ein lokale AWP (4.19). Zur Bestimmung der Unstetigkeitsstelle verwenden wir die Gleichung

$$\tilde{\xi}_\ell - \tau(\tilde{\xi}_\ell, z_{n+1}(\tilde{\xi}_\ell)) - \tilde{\xi}_{\ell-1} = 0.$$

Jedoch ist  $z_{n+1}$  nur eine Näherung der exakten Lösung  $y$ . Es zeigt sich, dass im Grenzfalle  $h \rightarrow 0$  auch die Näherungen  $\tilde{\xi}_\ell$  für die Unstetigkeitsstellen gegen die Unstetigkeitsstellen  $\xi_\ell$  von  $y$  konvergieren.

Über die Detektion von Unstetigkeitsstellen bei Dgln. mit mehreren Verzögerungen sind Beschreibungen enthalten in [18].

## Einfaches Runge-Kutta-Verfahren

Wir betrachten ein AWP (4.18) mit konstanter Verzögerung  $\tau > 0$ . Ein relativ einfaches numerisches Verfahren entsteht, wenn wir eine konstante Schrittweite  $h = \frac{\tau}{m}$  mit einem  $m \in \mathbb{N}$  verwenden. Problem 2 tritt dann nicht auf, da die Schrittweitenrestriktion  $h \leq \tau$  gilt. Problem 3 wird berücksichtigt, da die Unstetigkeitsstellen automatisch zu den Gitterpunkten  $\Delta$  gehören.

Die Anwendung eines SRK-Verfahrens liefert

$$Y_{n+1}^i = y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_{n+1}^j, Y_{n+1}^j, \eta(t_{n+1}^j - \tau)), \quad i = 1, \dots, s$$

$$\eta(t_n + \theta h) = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i(\theta) f(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i, \eta(t_{n+1}^i - \tau)), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Die beteiligten Zeitpunkte sind hier einfach

$$t_{n+1}^j - \tau = t_n + c_j h - mh = t_{n-m} + c_j h = t_{n+1-m}^j$$

für  $j = 1, \dots, s$ . Verwenden wir ein natürliches SRK-Verfahren gemäß Definition 4.6, dann folgt aus Satz 4.2

$$\eta(t_{n+1}^j) = Y_{n+1}^j \quad \Rightarrow \quad \eta(t_{n+1}^j - \tau) = Y_{n+1-m}^j$$

für  $j = 1, \dots, s$ . Es entsteht das numerische Verfahren

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^i &= y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_{n+1}^j, Y_{n+1}^j, Y_{n+1-m}^j), \quad i = 1, \dots, s \\ y_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i, Y_{n+1-m}^i) \end{aligned} \quad (4.27)$$

für  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Dieses Verfahren wurde über ein natürliches SRK-Verfahren hergeleitet. Jedoch hängt (4.27) nur von den Koeffizienten des diskreten RK-Verfahrens ab, d.h. ein Interpolant tritt nicht mehr auf. Die folgende Konvergenzaussage gilt entsprechend für ein diskretes RK-Verfahren.

**Satz 4.9** *Gegeben sei ein AWP (4.18) mit  $f \in C^p$  in  $[t_0, t_{\text{end}}] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , einer Anfangsfunktion  $\phi \in C^p$  und einer konstanten Verzögerung  $\tau > 0$ . Verwendet werde ein RK-Verfahren mit diskreter Ordnung  $p$  und konstanter Schrittweite  $h = \frac{\tau}{m}$ ,  $m \geq 1$  von  $t_0$  bis  $t_0 + k\tau \leq t_{\text{end}}$ . Dann besitzt das Verfahren (4.27) die diskrete Ordnung  $p$ , d.h.*

$$\max_{1 \leq n \leq km} \|y(t_n) - y_n\| = \mathcal{O}(h^p).$$

Beweis: siehe Proposition 7.1 in [11]

## 4.4 Verfahren bei verteilten Verzögerungen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Lösung von Dgln. mit verteilten Verzögerungen, siehe Definition 1.3. Deren AWPe sollen auf AWPe zu Dgln. mit mehreren diskreten Verzögerungen oder gewöhnlichen Dgln. zurückgeführt werden. O.E.d.A. werden autonome Dgln. betrachtet.

### Äquivalente einfachere Systeme

In Dgln. mit verteilter Verzögerung (1.11) treten Integrale

$$z(t) = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} y(t - \tau) g(\tau) \, d\tau$$

mit Dichtefunktionen  $g$  auf. Ein Anfangswert  $z(0)$  kann aus den Anfangswerten  $y(-\tau)$  für  $\tau \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]$  erhalten werden. Im Fall  $y(-\tau) \equiv y_0$  mit Konstante  $y_0$  folgt auch  $z(0) = y_0$  wegen der Normierung der Dichtefunktion.



i) *Exponentialverteilung*

Bei einer Exponentialverteilung liegt eine Dichtefunktion

$$g(\tau) = \theta e^{-\theta\tau} \quad \text{für } \tau \geq 0$$

mit Parameter  $\theta > 0$  vor. Somit ist  $\tau_{\min} = 0$  und  $\tau_{\max} = \infty$ . Der zugehörige Erwartungswert lautet  $\bar{\tau} = \frac{1}{\theta}$ . Wir berechnen mit partieller Integration

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^\infty y(t-\tau)\theta e^{-\theta\tau} d\tau = \theta \int_0^\infty y'(t-\tau)e^{-\theta\tau} d\tau \\ &= \theta \left( [-y(t-\tau)e^{-\theta\tau}]_{\tau=0}^{\tau=\infty} - \int_0^\infty y(t-\tau)\theta e^{-\theta\tau} d\tau \right) = \theta(y(t) - z(t)). \end{aligned}$$

Dadurch können wir die Dgl. mit verteilter Verzögerung überführen in das System gewöhnlicher Dgln.

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y(t), z(t)) \\ z'(t) &= \theta y(t) - \theta z(t). \end{aligned}$$

**Beispiel 4.4** Wir betrachten die einfache Dgl. mit verteilter Verzögerung

$$y'(t) = \lambda \int_0^\infty y(t-\tau)\theta e^{-\theta\tau} d\tau$$

mit Parametern  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $\theta > 0$ . Es folgt das System gewöhnlicher Dgln.

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda z(t) \\ z'(t) &= \theta y(t) - \theta z(t). \end{aligned}$$

Daraus läßt sich die gewöhnliche Dgl. zweiter Ordnung

$$z''(t) + \theta z'(t) - \theta \lambda z(t) = 0.$$

herleiten. Hier sind gedämpfte Schwingungen möglich.

ii) *Gammaverteilung*

Zur Gammaverteilung lautet die Dichtefunktion

$$g(\tau) = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \tau^{p-1} e^{-\theta\tau} \quad \text{für } \tau \geq 0$$

mit Parametern  $\theta > 0$  und  $p > 0$ . Der Erwartungswert ist  $\bar{\tau} = \frac{p}{\theta}$ . Wir nehmen im folgenden ganzzahliges  $p \geq 2$  an (für  $p = 1$  entsteht die Exponentialverteilung).

**Lemma 4.3** Sei  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Die Funktionen  $y, y'$  sollen für  $t \rightarrow -\infty$  höchstens polynomial anwachsen. Zu einer ganzen Zahl  $n \geq 1$  und  $t \geq 0$  betrachte

$$z_n(t) = \int_0^\infty y(t - \tau) c \tau^{n-1} e^{-\theta\tau} d\tau$$

mit einer Konstante  $c > 0$ . Dann gilt

$$z'_n(t) = -\theta z_n(t) + z_{n-1}(t)$$

für  $n \geq 2$  sowie  $z'_1(t) = -\theta z_1(t) + cy(t)$ .

Beweis:

Mit partieller Integration folgt für  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} z'_n(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^\infty y(t - \tau) c \tau^{n-1} e^{-\theta\tau} d\tau = c \int_0^\infty y'(t - \tau) \tau^{n-1} e^{-\theta\tau} d\tau \\ &= c \left[ -y(t - \tau) \tau^{n-1} e^{-\theta\tau} \right]_{\tau=0}^{\tau=\infty} + c \int_0^\infty y(t - \tau) (\tau^{n-2} - \theta \tau^{n-1}) e^{-\theta\tau} d\tau \\ &= \int_0^\infty y(t - \tau) c \tau^{n-2} e^{-\theta\tau} d\tau - \theta \int_0^\infty y(t - \tau) c \tau^{n-1} e^{-\theta\tau} d\tau \\ &= z_{n-1}(t) - \theta z_n(t). \end{aligned}$$

Für  $n = 1$  folgt die Formel für  $z'_1$  wie bei der Exponentialverteilung. □

Wir wenden Lemma 4.3 an mit  $n = p$  und  $c = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)}$ . Aus einer verzögerten Dgl. (1.11) entsteht ein System aus gewöhnlichen Dgln.

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z_n) \\ z'_1 &= -\theta z_1 + cy \\ z'_2 &= -\theta z_2 + z_1 \\ &\vdots \\ z'_{n-1} &= -\theta z_{n-1} + z_{n-2} \\ z'_n &= -\theta z_n + z_{n-1}. \end{aligned}$$

Hier ist die Bestimmung der Anfangswerte für alle Lösungskomponenten mit mehr Aufwand verbunden, auch im Fall konstanter Anfangswerte.

iii) *Gleichverteilung*

Gegeben sind die Intervallgrenzen  $\tau_{\min} < \tau_{\max}$ . Als Abkürzung setzen wir  $L = \tau_{\max} - \tau_{\min}$ . Die Dichtefunktion ist nun konstant  $g(\tau) = \frac{1}{L}$  für  $\tau \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ . Der

Erwartungswert ist die Intervallmitte  $\bar{\tau} = \frac{1}{2}(\tau_{\min} + \tau_{\max})$ . Mit dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung folgt

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} y(t - \tau) \frac{1}{L} d\tau = \frac{1}{L} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} y'(t - \tau) d\tau = -\frac{1}{L} \int_{t - \tau_{\min}}^{t - \tau_{\max}} y(s) ds \\ &= \frac{1}{L} (y(t - \tau_{\min}) - y(t - \tau_{\max})). \end{aligned}$$

Aus einer Dgl. mit verteilter Verzögerung (1.11) entsteht hier ein Dgl.-System mit zwei Verzögerungen

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y(t), z(t)) \\ z'(t) &= \frac{1}{L} (y(t - \tau_{\min}) - y(t - \tau_{\max})). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Die Anfangswerte  $z(0)$  folgen wieder aus den Anfangswerten von  $y$ . Ob das alternative System vollständig äquivalent ist zum ursprünglichen Problem wäre noch zu untersuchen. Bei AWPen der Dgl. (4.28) entstehen typischerweise Unstetigkeitsstellen in der Lösung.

**Beispiel 4.5** Wir greifen das SIR-Modell (1.13) aus Beispiel 1.6 auf. Die Dichtefunktion beschreibe eine Gleichverteilung auf  $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ . Sei

$$J(t) = \frac{1}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} I(t - \tau) d\tau.$$

Es folgt das System aus verzögerten Dgln.

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t)I(t) + \gamma J(t) \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ R'(t) &= \gamma I(t) - \gamma J(t) \\ J'(t) &= \frac{1}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} (I(t - \tau_{\min}) - I(t - \tau_{\max})) \end{aligned} \tag{4.29}$$

mit Konstanten  $\beta, \gamma > 0$ .

iv) *Beta-Verteilung*

Bei einer Beta-Verteilung haben wir eine Dichtefunktion

$$g(\tau) = C\tau^p(1 - \tau)^q \quad \text{für } \tau \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]$$

mit ganzen Zahlen  $p, q \geq 0$  und einer Konstante  $C > 0$  zur Normierung. Der Spezialfall  $p = q = 0$  stellt eine Gleichverteilung dar. Es gilt hier

$$g(\tau) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \tau^i$$

mit  $n = p + q$ . Wir erhalten

$$z(t) = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} y(t - \tau)g(\tau) \, d\tau = \sum_{i=0}^n \alpha_i \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} y(t - \tau)\tau^i \, d\tau = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i(t),$$

wobei die Funktionen  $x_i$  wie folgt definiert sind.

**Lemma 4.4** Sei  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Zu einer ganzen Zahl  $n \geq 0$  und  $t \geq 0$  wird

$$x_i(t) = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} y(t - \tau)\tau^i \, d\tau$$

gesetzt. Dann gilt

$$x'_i(t) = y(t - \tau_{\min})\tau_{\min}^i - y(t - \tau_{\max})\tau_{\max}^i + ix_{i-1}(t)$$

für  $i \geq 0$ , wobei formal  $x_{-1} \equiv 0$  gesetzt wird.

Beweis:

Differentiation nach der Zeit liefert

$$\begin{aligned} x'_i(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} y(t - \tau)\tau^i \, d\tau = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} y'(t - \tau)\tau^i \, d\tau \\ &= [-y(t - \tau)\tau^i]_{\tau=\tau_{\min}}^{\tau=\tau_{\max}} + i \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} y(t - \tau)\tau^{i-1} \, d\tau \\ &= y(t - \tau_{\min})\tau_{\min}^i - y(t - \tau_{\max})\tau_{\max}^i + ix_{i-1}(t) \end{aligned}$$

für  $i \geq 1$ . Im Fall  $i = 0$  folgt

$$x'_0(t) = \frac{d}{dt} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} y(t - \tau) \, d\tau = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} y'(t - \tau) \, d\tau = y(t - \tau_{\min}) - y(t - \tau_{\max}),$$

was mit der Formel übereinstimmt.  $\square$

Mit Lemma 4.4 erhalten wir ein System aus verzögerten Dgln.

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y(t), \alpha_0 x_0(t) + \alpha_1 x_1(t) + \cdots + \alpha_n x_n(t)) \\ x'_i(t) &= y(t - \tau_{\min})\tau_{\min}^i - y(t - \tau_{\max})\tau_{\max}^i + ix_{i-1}(t), \quad i = 1, \dots, n \\ x'_0(t) &= y(t - \tau_{\min}) - y(t - \tau_{\max}). \end{aligned}$$

Es entstehen  $n + 2$  Dgln., jedoch liegen nur zwei Verzögerungen vor.

## System aus Quadratur

Wir approximieren das Integral, welches die verteilte Verzögerung beschreibt, durch eine Quadraturformel. Es folgt

$$z(t) = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} y(t - \tau)g(\tau) \, d\tau \approx \sum_{i=1}^m \omega_i y(t - \tau_i)$$

mit Knoten  $\tau_{\min} \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m \leq \tau_{\max}$  und reellwertigen Gewichten  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ . Dabei soll wegen der Normierung der Dichtefunktion gelten

$$\sum_{i=1}^m \omega_i = 1. \quad (4.30)$$

Wir erhalten eine Dgl. mit  $m$  Verzögerungen

$$y'(t) = f\left(y(t), \sum_{i=1}^m \omega_i y(t - \tau_i)\right). \quad (4.31)$$

Die Anfangswerte sind aus der ursprünglichen Aufgabenstellung gegeben. Nebenbei bewirkt die Bedingung (4.30), dass die stationären Lösungen von (1.11) und (4.31) übereinstimmen. Der Rechenaufwand zur numerischen Lösung eines AWP's zu (4.31) steigt mit der Anzahl  $m$  der diskreten Verzögerungen an. Daher sollte die Anzahl der Quadraturknoten möglichst klein gehalten werden.

Die Gauß-Quadratur dient zur numerischen Berechnung von gewichteten Integralen, siehe z.B. [21]. Als Gewichtsfunktion wird hier die Dichtefunktion  $g$  verwendet. Diese Quadratur besitzt eine Optimalitätseigenschaft: Bei  $m$  Knoten gilt in der Gauß-Quadratur die Exaktheit

$$\int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} p(\tau)g(\tau) \, d\tau = \sum_{i=1}^m \omega_i p(\tau_i)$$

für alle Polynome  $p$  mit Grad kleinergleich  $2m - 1$ . Der Polynomgrad ist hier größtmöglich bei festem  $m$ . Bei einer Gauß-Quadratur sind alle Gewichte positiv und sie erfüllen die Bedingung (4.30). Tabelle 4.4 enthält die Namen der Gauß-Quadratur zu gängigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. In [17] wurde zur Quadratur eine zusammengesetzte Simpson-Regel verwendet.

Tabelle 6: Gauß-Quadraturen zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Verteilung	Träger	Name der Quadratur
Gleichverteilung	$[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$	Gauß-Legendre-Q.
Betaverteilung	$[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$	Gauß-Jacobi-Q.
Exponentialverteilung	$[0, \infty)$	Gauß-Laguerre-Q.
Gammaverteilung	$[0, \infty)$	verallgemeinerte Gauß-Laguerre-Q.

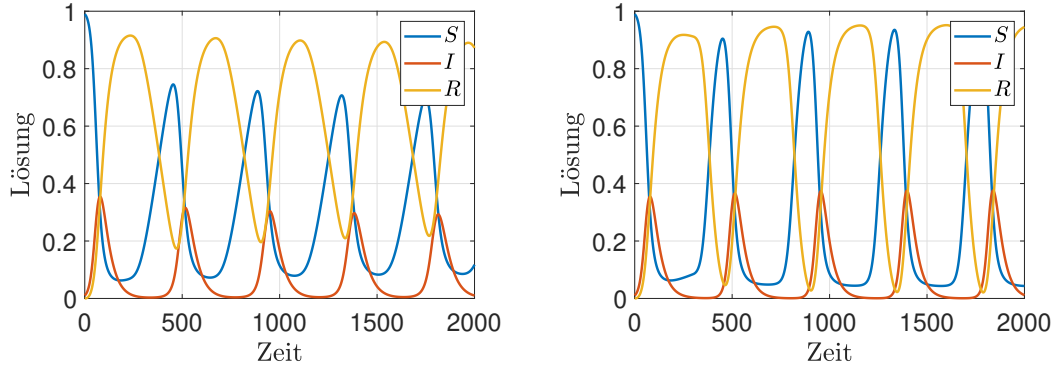


Abbildung 10: Numerische Lösungen zu SIR-Modellen mit gleichverteilter Verzögerung (links) und einer einzelnen Verzögerung (rechts).

**Beispiel 4.6** Wir betrachten erneut SIR-Modell (1.13) aus Beispiel 1.6 auf. Die Dichtefunktion beschreibe eine Gleichverteilung auf  $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ . Zum einen wenden wir die Gauß-Legendre Quadratur an. Es entsteht das approximierende System aus verzögerten Dgln.

$$\begin{aligned}
 S'(t) &= -\beta S(t)I(t) + \gamma \sum_{i=1}^m \omega_i I(t - \tau_i) \\
 I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\
 R'(t) &= \gamma I(t) - \gamma \sum_{i=1}^m \omega_i I(t - \tau_i).
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Zum anderen haben wir das äquivalente Dgl.-System (4.29) mit zwei Verzögerungen. Wir lösen nun AWPe zu beiden Systemen (4.29) und (4.32) jeweils numerisch in einem Zeitintervall  $[0, 2000]$ . Die Anfangswerte sind konstant  $S_0 = 0.99$ ,  $I_0 = 0.01$ ,  $R_0 = 0$ . Desweiteren wird gesetzt  $\beta = 0.1$ ,  $\gamma = 0.03$ ,  $\tau_{\min} = 200$ ,  $\tau_{\max} = 400$ . Abbildung 10 zeigt links die Lösung für das System (4.29) und rechts die Lösung für das System (4.32) mit einem Knoten ( $m = 1$ ). Letzteres entspricht dem SIR-Modell aus Beispiel 1.4, wo eine einzelne Verzögerung  $\tau$  auftritt (hier gilt dann  $\tau = \bar{\tau}$ ). Desweiteren enthält Abbildung 11 die maximale Differenz zwischen den beiden Modellen für die drei Lösungskomponenten in  $t \in [0, 2000]$ . Wir beobachten, dass diese Differenzen für steigende Anzahl der Quadraturknoten deutlich absinkt. Später stagniert diese Differenz, da dann die numerischen Fehler aus der Zeitintegration der AWPe dominiert.

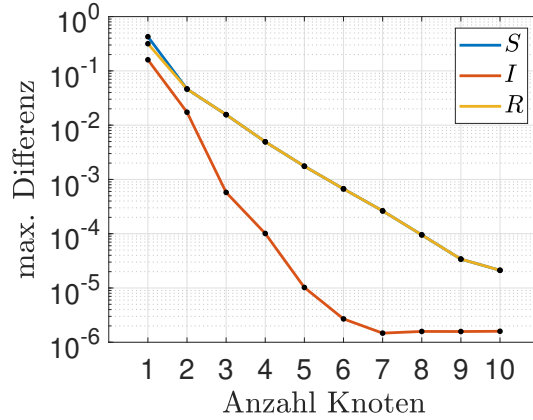


Abbildung 11: Maximale Differenz zwischen den Lösungen der AWPe zu den SIR-Modellen mit zwei Verzögerungen und Approximation über Gauß-Quadratur.

### Stetiges Runge-Kutta-Verfahren

Im Fall  $\tau_{\min} > 0$  und unter der Schrittweitenrestriktion  $h_{n+1} \leq \tau_{\min}$  kann ein SRK-Verfahren für ein AWP einer (autonomen) verzögerten Dgl. (1.11) mit verteilter Verzögerung angewendet werden. Das SRK-Verfahren besitzt dann die Gestalt

$$Y_{n+1}^i = y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_{n+1}^j, I_{n+1}^j), \quad i = 1, \dots, s$$

$$\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^s b_i(\theta) f(Y_{n+1}^i, I_{n+1}^i), \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

mit den Zwischenstellen  $t_{n+1}^i = t_n + c_i h_{n+1}$  und den Integralen

$$I_{n+1}^i = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \eta(t_{n+1}^j - \tau) g(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, s. \quad (4.33)$$

Ein Interpolant  $\eta$  wird somit in einem Teilintervall  $[t_{n+1}^j - \tau_{\max}, t_{n+1}^j - \tau_{\min}]$  integriert. Durch die Schrittweitenrestriktion  $h_{n+1} \leq \tau_{\min}$  und die Voraussetzung  $0 \leq c_1, \dots, c_s \leq 1$  wird das Problem 2 vermieden. Die benötigten Integrale lassen sich meist leicht berechnen, da der Interpolant  $\eta$  stückweise ein Polynom ist.

Im Fall  $\tau_{\min} = 0$  tritt jedoch zwangsläufig das Problem 2 auf. Hier ist eine geeignete Approximation des noch unbekanntes Integrals durchzuführen.

Dieses Verfahren ist vorteilhaft, wenn die Integrale (4.33) exakt bestimmt werden können. Werden die Integrale (4.33) durch eine Quadraturformel ersetzt, dann entsteht im wesentlichen die Anwendung eines SRK-Verfahrens auf ein approximatives System (4.31) aus dieser Quadratur.

## 5 Anwendungen

In diesem Kapitel besprechen wir Anwendungsfelder für die Modellierung mit verzögerten Dgl.

### 5.1 Populationsdynamik

Wir gehen vom allgemeinen Modelltyp hin zu konkreten Beispielen.

#### Modellierung

In biologischen Anwendungen wird die folgende Modellklasse betrachtet, siehe [4].

**Definition 5.1** *Ein Rekrutierungs-Modell (recruitment model) mit Verzögerung ist eine Dgl. der Form*

$$y'(t) = B(y(t - \tau)) - D(y(t)) \quad (5.1)$$

mit der Populationsgröße oder Populationsdichte  $y$ , einer Reifungsdauer  $\tau > 0$ , einer Geburtsfunktion  $B : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  und einer Sterbefunktion  $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\mathbb{R}_0^+ \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ .

Anfangswerte  $y_0 : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  sollen nichtnegativ sein mit  $y_0(0) > 0$ . Stationäre Lösungen  $y^*$  der verzögerten Dgl. (5.1) sind charakterisiert durch die algebraische Gleichung

$$B(y^*) = D(y^*). \quad (5.2)$$

Bei einem Modell der Form (5.1) sind die folgenden Eigenschaften gewünscht:

(P1)  $B(0) = D(0) = 0$  und  $B(y) > D(y)$  für hinreichend kleines  $y$ ,

(P2) es gibt eine Konstante  $K > 0$  mit  $B(K) = D(K)$ ,

(P3)  $(y - K)(B(y) - D(y)) < 0$  für  $y \in (0, \infty) \setminus \{K\}$ .

Diese Forderungen sind auch ohne Verzögerung ( $\tau = 0$ ) sinnvoll. Die Eigenschaft (P1) bewirkt, dass  $y^* = 0$  eine stationäre Lösung der Dgl. ist und dass die Population für kleine Werte ansteigt. Die Eigenschaft (P2) bedeutet die Existenz einer positiven stationären Lösung  $K$ , genannt die Kapazität. Desweiteren entsteht bei Vorliegen von (P3) das folgende Verhalten.



1. Fall:  $y > K \quad \Rightarrow \quad B(y) < D(y)$

2. Fall:  $y < K \quad \Rightarrow \quad B(y) > D(y)$

Dadurch ist die Kapazität  $K$  als positive stationäre Lösung eindeutig.

In Beispiel 1.2 wurde ein verzögertes logistisches Wachstum betrachtet. Die Dgl. besitzt die Gestalt

$$\begin{aligned} N'(t) &= r N(t) \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right) \\ &= r N(t) - \frac{1}{K} N(t) N(t - \tau) \end{aligned}$$

mit Konstanten  $r, K > 0$ . Die Verzögerung  $\tau$  hat die Bedeutung einer verspäteten Reaktion auf die Über- oder Unterschreitung der Kapazität  $K$  des Lebensraums. Diese Gleichung ist nicht vom Typ aus Definition 5.1.

In Beispiel 1.1 trat die lineare verzögerte Dgl.

$$N'(t) = b N(t - \tau) - d N(t)$$

mit Geburtenrate  $b > 0$  und Sterberate  $d > 0$  auf. Jetzt ist  $\tau$  die Zeitspanne für die Entwicklung eines Individuums. Dies kann eine Schwangerschaftszeit sein oder die Zeitspanne von der Eiablage bis zum Schlüpfen bei Insekten. Die Eigenschaft (P1) ist erfüllt genau dann, wenn  $b > d$  gilt. Es ist  $N^* = 0$  die einzige stationäre Lösung (für  $b \neq d$ ). Daher ist die Eigenschaft (P2) nicht gegeben.

### Schmeißfliegen-Modell

Die Population der australischen Schaf-Schmeißfliege (*Lucilia cuprina*) wurde untersucht. Es ergab sich als Modell die *Nicholson-Gleichung*

$$N'(t) = b N(t - \tau) e^{-aN(t-\tau)} - d N(t) \tag{5.3}$$

mit Eiablagelrate  $b > 0$ , Sterberate  $d > 0$  und Konstante  $a > 0$ , wobei  $\frac{1}{a}$  die Ressourcen im Lebensraum der Larven beschreibt. Lösungen dieser Gleichung sind jeweils nichtnegativ. Der Term  $e^{-aN} \in (0, 1]$  beschreibt eine Überlebenswahrscheinlichkeit der Larven. Für  $N_j = \frac{j}{a}$  mit  $j \in \mathbb{N}$  ergibt sich z.B.  $e^{-aN_1} \approx \frac{1}{3}$ ,  $e^{-aN_2} \approx \frac{1}{9}$ ,  $e^{-aN_3} \approx \frac{1}{27}$ , etc. Die Gleichung (5.3) wird auch als *Ricker-Modell* oder *Ricker-Wachstum* bezeichnet.

Stationäre Lösungen der Dgl. (5.3) sind  $N_1^* = 0$  und

$$N_2^* = \frac{1}{a} \ln \left( \frac{b}{d} \right). \tag{5.4}$$

Es folgt, dass nur im Fall  $b > d$  ein positiver stationärer Zustand existiert.

Die gewünschten Modelleigenschaften sind mit  $B(y) = bye^{-ay}$  und  $D(y) = dy$  für  $b > d$  erfüllt:

(P1)  $B(0) = D(0) = 0$  und für kleines  $y > 0$

$$B(y) \approx by(1 - ay) = by - aby^2 > dy = D(y).$$

(P2) Eine positive stationäre Lösung ist  $K = N_2^*$  aus (5.4).

(P3) Es gilt  $B(y) \neq D(y)$  für  $y \neq K$ , da nur  $K$  eine positive stationäre Lösung ist. Mit Stetigkeit von  $B$  und  $D$  hat  $B - D$  gleiches Vorzeichen jeweils für  $y > K$  und  $y < K$ .

1. Fall:  $y > K$

Der Grenzfall  $y \rightarrow \infty$  liefert  $B(y) \rightarrow 0$  und  $D(y) \rightarrow \infty$ . Also ist  $B - D < 0$ .

2. Fall:  $y < K$

Der Grenzfall  $y \rightarrow 0$  zeigt wie bei (P1), dass  $B - D > 0$ .

Mit der Skalierung  $\tilde{N} = aN$  ergibt sich aus (5.3) die äquivalente Dgl.

$$\tilde{N}'(t) = b\tilde{N}(t - \tau)e^{-\tilde{N}(t - \tau)} - d\tilde{N}(t). \quad (5.5)$$

Sei  $\tilde{K} = \ln\left(\frac{b}{d}\right)$  die zugehörige positive stationäre Lösung. Die charakteristische Gleichung laut Definition 2.4 ist dann

$$\lambda + d + e^{-\lambda\tau}d\left(\ln\left(\frac{b}{d}\right) - 1\right) = 0.$$

Eine Stabilitätsanalyse fand statt für die Dgl. (5.3) in [24] und für die Dgl. (5.5) in [4]. Es ergeben sich daraus die folgenden Eigenschaften bei der Dgl. (5.3) mit positiven Anfangswerten:

- Es gilt immer  $\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{b}{dae}$ .
- Für  $b \leq d$  folgt  $\lim_{t \rightarrow 0} N(t) = 0$ .
- Für  $d < b \leq de^2$  ist  $K$  asymptotisch stabil.
- Für  $b > de^2$  ist  $K$  asymptotisch stabil für  $\tau \in [0, \tau_0)$  und instabil für  $\tau > \tau_0$  mit

$$\tau_0 = \frac{1}{d\sqrt{c^2 - 1}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c}\right), \quad (5.6)$$

wobei  $c = \ln\left(\frac{b}{d}\right) - 1$  gilt. Für  $\tau > \tau_0$  liegt eine periodische Lösung vor.

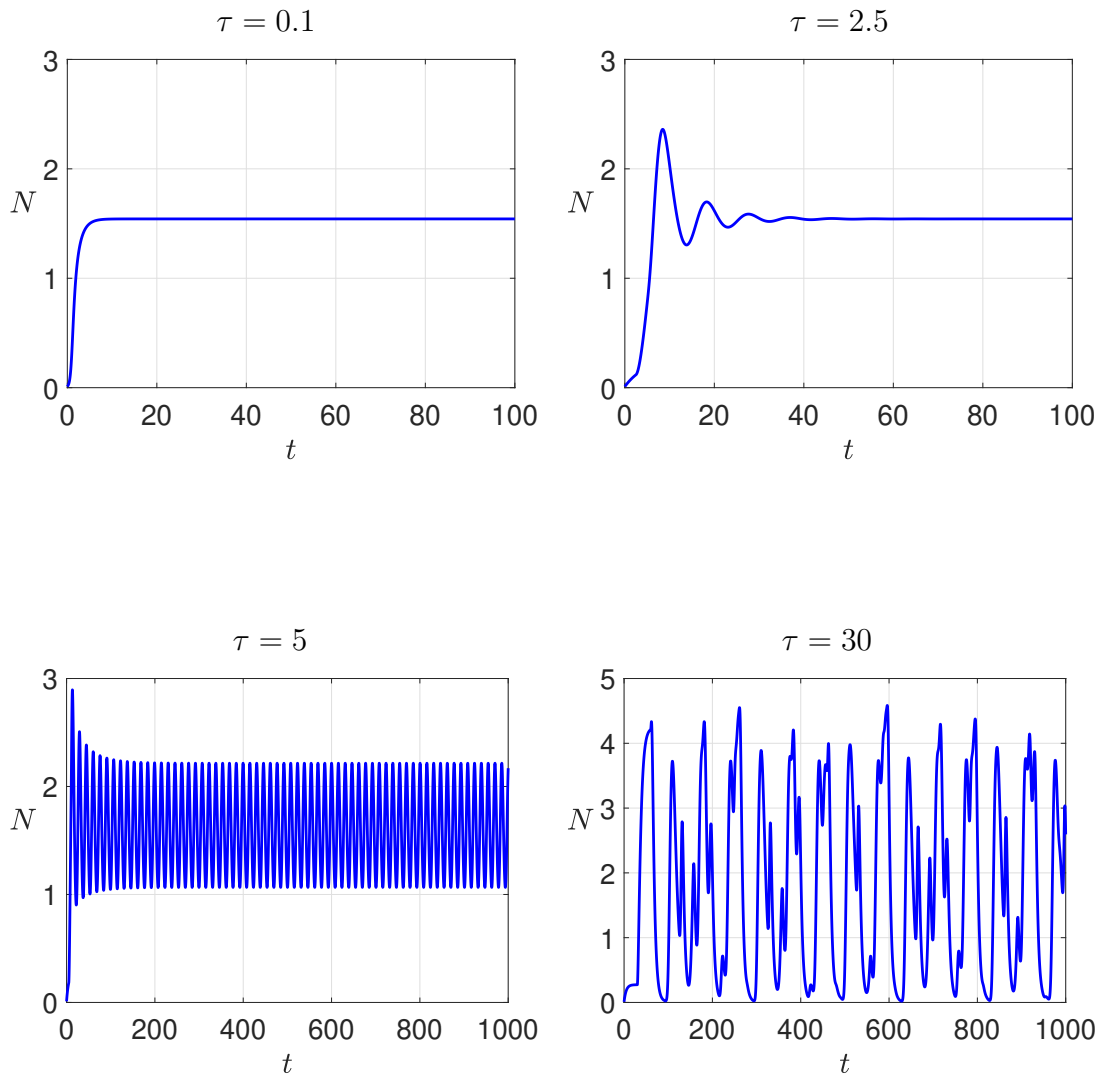


Abbildung 12: Lösungen von AWPen der Nicholson-Gleichung für verschiedene Verzögerungen  $\tau$ . Die Population  $N$  ist skaliert auf Vielfache von Tausend.

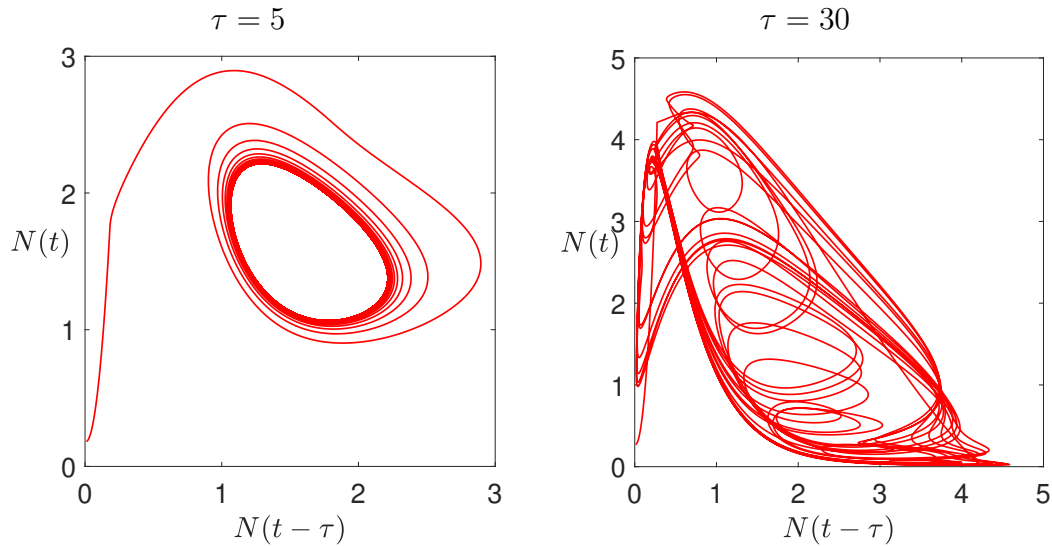


Abbildung 13: Lösungen von AWPen der Nicholson-Gleichung für verschiedene Verzögerungen  $\tau$  im Pseudo-Phasenraum. Die Population  $N$  ist skaliert auf Vielfache von Tausend.

Wir lösen AWPen der Dgl. (5.3) numerisch mit den Parametern  $b = 5.93$ ,  $d = 0.212$ ,  $\frac{1}{a} = 463$  aus [7]. Es folgt  $\tau_0 \approx 2.526$  für (5.6). Als Anfangswerte setzen wir konstant  $N_0 = 10$ . Abbildung 12 zeigt die Lösungen für verschiedene Wahlen der Verzögerung  $\tau$ . Desweiteren enthält Abbildung 13 die Lösungen im Pseudo-Phasenraum für den periodischen Fall und den chaotischen Fall.

Vergleiche von Lösungen der Nicholson Gleichung mit Ergebnissen aus realen Experimenten sind enthalten z.B. in [6, 7].

### Stubenfliegen-Modell

Betrachtet werden Populationen der Stubenfliege (*pusca domestica*). *Taylor* und *Sokal* [23] konstruierten als Modell die verzögerte Dgl.

$$N'(t) = b N(t - \tau) (k - bcN(t - \tau)) - d N(t) \quad (5.7)$$

mit der Eiablage rate  $b > 0$ , der Sterberate  $d > 0$ ,  $k > 0$  die maximale Eier-zu-Fliege Überlebensrate und  $c > 0$  die Reduzierung der Überlebensrate durch jedes weitere Ei. Die Positivität der Lösung eines Anfangswertproblems kann hier nicht garantiert werden.

Die Bedingung (5.2) führt nun auf eine quadratische Gleichung. Stationäre Lösun-

gen der Dgl. (5.7) sind  $N_1^* = 0$  und

$$N_2^* = \frac{k - \frac{d}{b}}{bc} = \frac{bk - d}{b^2c}. \quad (5.8)$$

Somit ist  $bk > d$  erforderlich für einen positiven stationären Zustand.

Die Geburts- und Sterbefunktion sind hier  $B(y) = by(k - bcy)$  und  $D(y) = dy$ . Unter der Annahme  $bk > d$  überprüfen wir die Modelleigenschaften.

(P1) Es gilt  $B(0) = D(0) = 0$  sowie für kleines  $y$

$$B(y) = bky - b^2cy^2 > dy = D(y).$$

(P2) Eine positive stationäre Lösung ist  $K = N_2^*$  aus (5.8).

(P3) Die positive stationäre Lösung ist eindeutig. Wieder mit der Stetigkeit von  $B$  und  $D$  hat  $B - D$  gleiches Vorzeichen für  $y < K$  bzw.  $y > K$ .

1. Fall:  $y > K$

Der Grenzfall  $y \rightarrow \infty$  zeigt  $B - D < 0$ .

2. Fall:  $y < K$

Der Grenzfall  $y \rightarrow 0$  ergibt mit (P1) hier  $B - D > 0$ .

Wir verwenden die Parameterwahl  $b = 1.81$ ,  $d = 0.147$ ,  $k = 0.5107$ ,  $c = 0.000226$ ,  $\tau = 5$  aus [23]. Anfangswert ist stets konstant  $N_0 = 10$ . Abbildung 14 zeigt die numerischen Lösungen zu AWPen mit verschiedenen Verzögerungen. Im Fall  $\tau = 6.5$  entstehen negative Lösungswerte und die numerische Lösung versagt für spätere Zeiten ( $t > 120$ ). Abbildung 15 zeigt zwei dieser Lösungen im Pseudo-Phasenraum.

## Populationsmodell mit zustandsabhängiger Verzögerung

Wir betrachten ein Modell für eine Population aus Menschen, wobei  $N$  die Populationsgröße bezeichnet. Zudem sei  $L > 0$  die Lebensdauer eines Individuums, welche von  $N$  abhängt. Es soll  $L$  eine monoton fallende Funktion sein, um den negativen Effekt aus einer Überbevölkerung darzustellen. Zudem sei  $B$  eine Geburtenrate, die von der Populationsdichte  $N$  abhängt jedoch nicht vom Alter der Individuen. Die Gesamtanzahl der lebenden Individuen ergibt sich dann zu, siehe [2, 15],

$$N(t) = \int_{t-L(N(t))}^t B(N(s)) \, ds.$$

Bei einer konstanten Geburtenrate  $B$  und einer konstanten Lebensdauer  $L$  würde einfach folgen  $N(t) = BL$  für alle  $t$ .

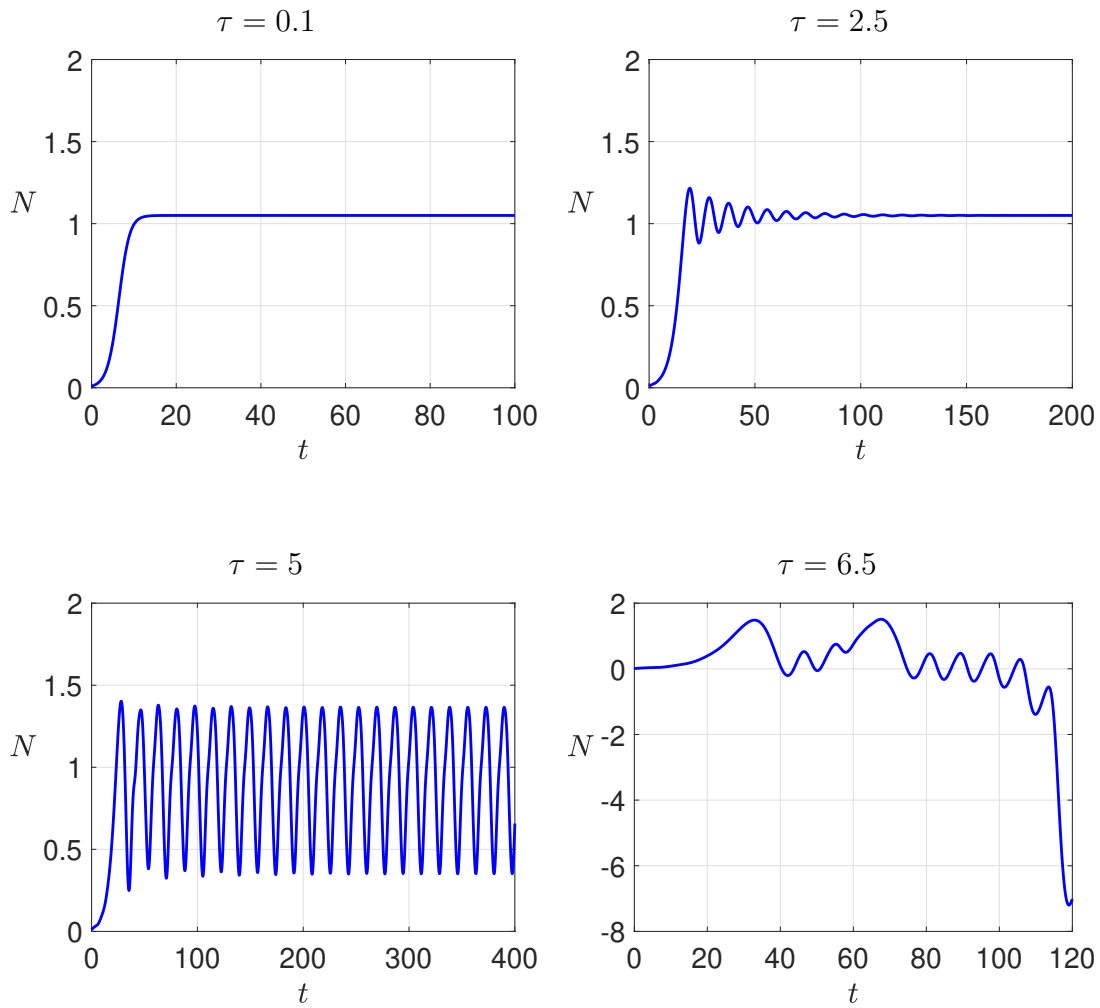


Abbildung 14: Lösungen von AWPen der Taylor-Sokal-Gleichung für verschiedene Verzögerungen  $\tau$ . Die Population  $N$  ist skaliert auf Vielfache von Tausend.

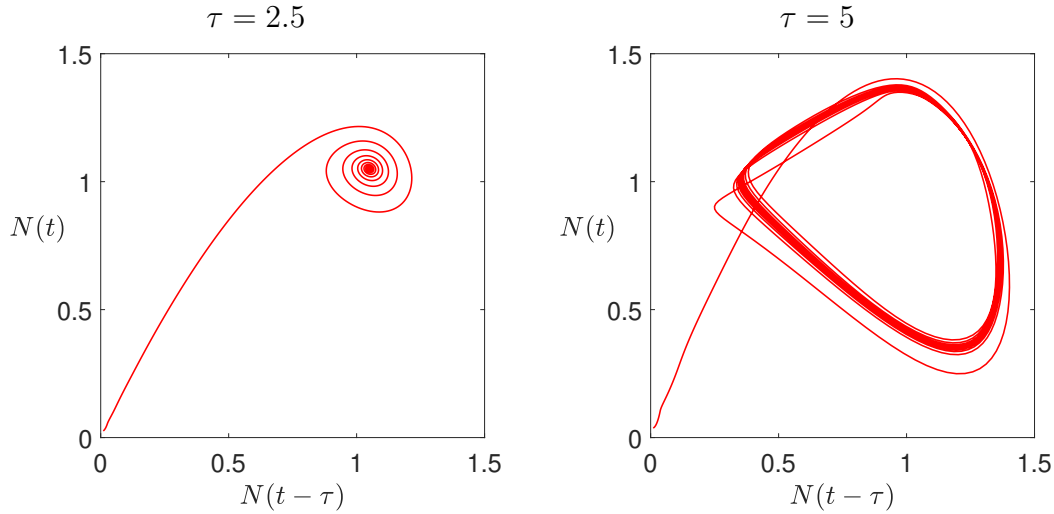


Abbildung 15: Lösungen von AWPen der Taylor-Sokal-Gleichung für verschiedene Verzögerungen  $\tau$  im Pseudo-Phasenraum. Die Population  $N$  ist skaliert auf Vielfache von Tausend.

Sei  $S$  eine Stammfunktion des Integranden  $B \circ N$ . Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert über Differentiation mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}
 N'(t) &= \frac{d}{dt}(S(t) - S(t - L(N(t)))) \\
 &= B(N(t)) - B(N(t - L(N(t))))(1 - L'(N(t))N'(t)) \\
 &= B(N(t)) - B(N(t - L(N(t)))) + B(N(t - L(N(t))))L'(N(t))N'(t).
 \end{aligned}$$

Wir erhalten daraus

$$N'(t) = \frac{B(N(t)) - B(N(t - L(N(t))))}{1 - L'(N(t))B(N(t - L(N(t))))}. \quad (5.9)$$

Es liegt eine verzögerte Dgl. vor, deren Verzögerung von der Lösung abhängt. Dazu ist erforderlich, dass sowohl  $B$  als auch  $L$  nicht konstant sind. Das Populationsmodell (5.9) ist nicht von der Form aus Definition 5.1.

## 5.2 Verkehrsfluss

Wir betrachten aufeinanderfolgende Fahrzeuge (Kfz) auf einer Straße.

### Einfaches Modell

Es seien  $n$  Fahrzeuge hintereinander auf einer Straße. Das  $i$ -te Fahrzeug sei hinter dem  $(i + 1)$ -ten Fahrzeug. Die Positionen und Geschwindigkeiten seien  $x_i$  und  $v_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Es gelten die gewöhnlichen Dgln.

$$x'_i(t) = v_i(t) \quad (5.10)$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Für die Beschleunigungen  $x''_i = v'_i$  betrachten wir als Modell verzögerte Dgln.

$$v'_i(t) = \alpha(v_{i+1}(t - \tau) - v_i(t - \tau)) \quad (5.11)$$

für  $i = 1, \dots, n - 1$  wie in [7]. Die Konstante  $\alpha > 0$  stellt eine Sensitivität dar, während  $\frac{1}{\alpha}$  die Bedeutung einer Relaxationszeit hat. Ein hoher Wert  $\alpha$  bedeutet ein starkes Beschleunigen bzw. Abbremsen. Die Verzögerung  $\tau > 0$  repräsentiert eine Reaktionszeit. Für das führende Fahrzeug verwenden wir die gewöhnliche Dgl.

$$v'_n(t) = \alpha(\bar{v} - v_n(t)) + u(t) \quad (5.12)$$

mit der Zielgeschwindigkeit  $\bar{v} > 0$  und ggf. einem Quellterm  $u$ .

Als Beispiel lösen wir AWPes der Dgln. (5.10), (5.11), (5.12) für zwei Fahrzeuge ( $n = 2$ ) in einem Zeitintervall  $[0, 200]$  mit den Anfangswerten

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1, \quad v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = 0.$$

Als Parameter setzen wir  $\alpha = \frac{1}{2}$  und  $\bar{v} = 2$ . Ein Quellterm

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } 100 \leq t \leq 101 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bewirkt ein abbremsen des führenden Fahrzeugs in einem bestimmten Zeitintervall. Für die Verzögerung werden die beiden Fälle  $\tau = \frac{1}{2}$  und  $\tau = 2$  simuliert. Abbildung 16 zeigt die Geschwindigkeiten der beiden Fahrzeuge in den beiden Fällen. Die Zielgeschwindigkeit  $\bar{v}$  wird von den Fahrzeugen erreicht. Zudem wird die Distanz  $h = x_2 - x_1$  zwischen den beiden Fahrzeugen in Abbildung 17 dargestellt. Bei der höheren Verzögerung treten gedämpfte Schwingungen bei der Geschwindigkeit des nachfolgenden Fahrzeugs auf. Zudem wird der Abstand zwischen den Fahrzeugen bei der Abbremsung kleiner. Dieser Effekt ist bei einer erhöhten Reaktionszeit zu erwarten.



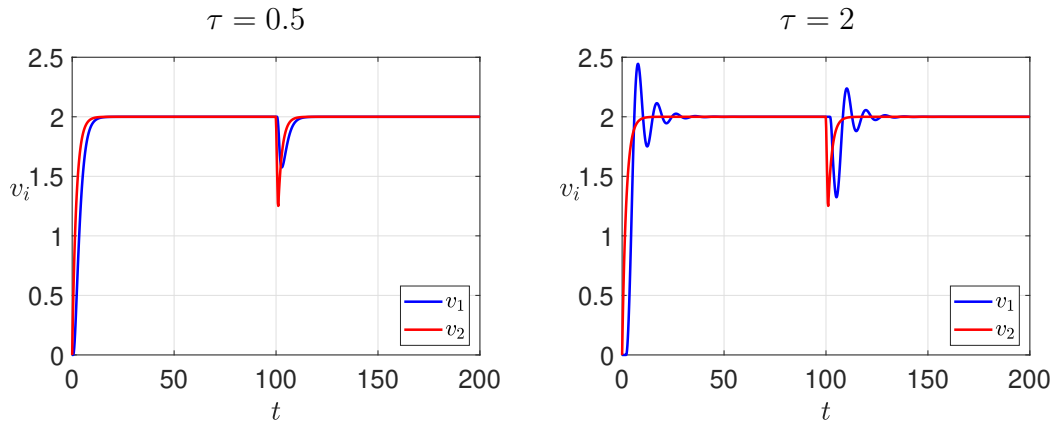


Abbildung 16: Geschwindigkeiten der zwei Fahrzeuge aus den Lösungen der Dgln. für verschiedene Verzögerungen.

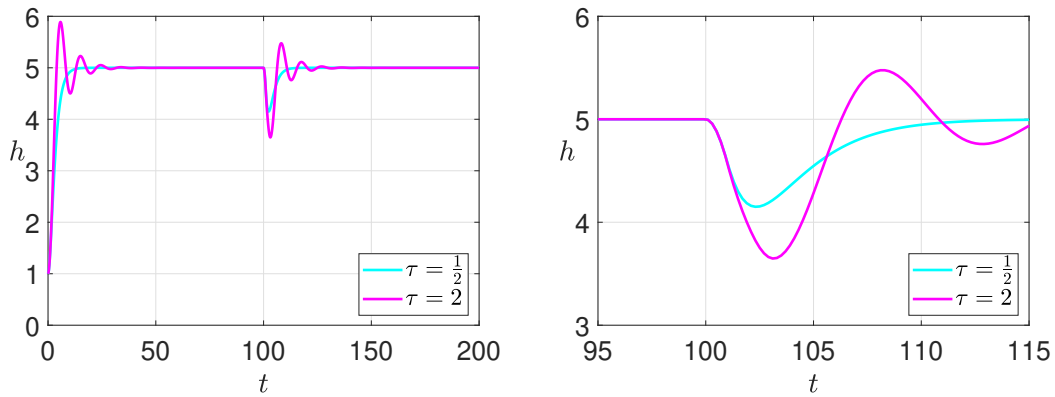


Abbildung 17: Distanz zwischen den beiden Fahrzeugen aus der Lösung der verzögerten Dgln.: gesamtes Zeitintervall (links) und Vergrößerung (rechts).

## Modell mit optimaler Geschwindigkeit

Wir betrachten ein Modell aus [12, 13]. Es bezeichne

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

die Distanz bzw. der Abstand des  $i$ -ten Fahrzeugs zum vorausfahrenden  $(i+1)$ -ten Fahrzeug. Wir nehmen eine optimale Geschwindigkeit  $V(h)$  für das  $i$ -te Fahrzeug an, welche vom Abstand abhängt. Für die Beschleunigung folgen als Modell die gewöhnlichen Dgln.

$$v_i'(t) = \alpha_i(V(h_i(t)) - v_i(t))$$

für  $i = 1, \dots, n$  mit den Sensitivitäten  $\alpha_i > 0$ , welches in [1] verwendet wurde. Entsprechend ergeben sich verzögerte Dgln.

$$v_i'(t) = \alpha_i(V(h_i(t - \tau)) - v_i(t - \kappa))$$

für  $i = 1, \dots, n$  mit zwei konstanten Verzögerungen  $\tau, \kappa > 0$ . Die Wahl  $\kappa = 0$  entspricht der Annahme eines menschlichen Fahrers, der sich sofort seiner eigenen Geschwindigkeit bewusst ist. Die Wahl  $\tau = \kappa$  kann als ein automatisiertes Fahren interpretiert werden, wobei die Geschwindigkeit aus Daten gemessen und berechnet werden muss. Wir setzen hier  $\kappa = 0$ , d.h.

$$v_i'(t) = \alpha_i(V(h_i(t - \tau)) - v_i(t)) \quad (5.13)$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Für das führende Fahrzeug ( $i = n$ ) ist der Abstand  $h_n$  nicht definiert. Stattdessen kann ein Abschluss des Systems wie in (5.12) verwendet werden. Alternativ nehmen wir an, dass sich die Fahrzeuge auf einer Kreisbahn mit Länge  $L$  bewegen. Dadurch kann in (5.13) für  $i = n$  nun  $h_n = x_1 - x_n + L$  eingesetzt werden. Es folgt das System

$$\begin{aligned} v_i'(t) &= \alpha_i(V(x_{i+1}(t - \tau) - x_i(t - \tau)) - v_i(t)), \quad i = 1, \dots, n - 1 \\ v_n'(t) &= \alpha_n(V(x_1(t - \tau) - x_n(t - \tau) + L) - v_n(t)). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass stationäre Lösungen dieses Systems bezüglich der Distanzen und Geschwindigkeiten gegeben sind durch

$$h_i^* = h^* = \frac{L}{n}, \quad v_i^* = V^* = V\left(\frac{L}{n}\right) \quad (5.15)$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Die zugehörigen Positionen sind nicht konstant, sondern

$$x_i^*(t) = ih^* + V^*t + C$$

für  $i = 1, \dots, n$  mit einem Scharparameter  $C \in \mathbb{R}$ . Diese stationären Lösungen gelten auch für ein System ohne Verzögerung.

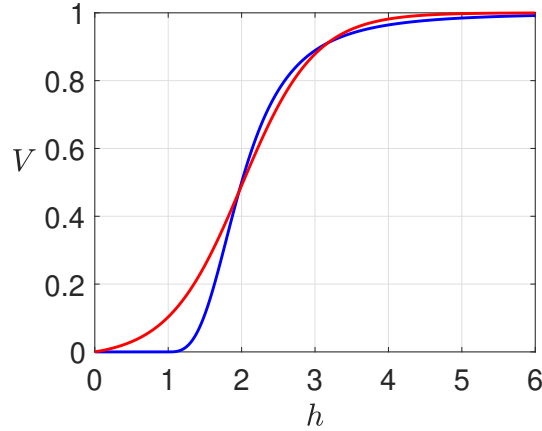


Abbildung 18: Funktionen für optimale Geschwindigkeit aus (5.16) in rot und aus (5.19) in blau.

Die optimale Geschwindigkeit  $V : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  soll die folgenden Eigenschaften besitzen, siehe [12]:

- (G1)  $V$  ist stetig, nichtnegativ und monoton steigend.
- (G2) Es gilt  $\lim_{h \rightarrow \infty} V(h) = \bar{v}$  mit einer Zielgeschwindigkeit  $\bar{v} > 0$ .
- (G3) Es existiert ein kritischer Abstand  $h_{\text{stop}} \geq 0$ , so dass  $V(h) = 0$  für  $h \leq h_{\text{stop}}$  und  $V(h) > 0$  für  $h > h_{\text{stop}}$  gilt.

Eine einfache Wahl lautet

$$V(h) = \bar{v} \frac{\tanh(sh - h_0) + \tanh(h_0)}{1 + \tanh(h_0)} \quad (5.16)$$

für  $h \geq 0$  mit Konstanten  $s, h_0 > 0$ . Hier ist (G3) nur mit  $h_{\text{stop}} = 0$  erfüllt. Abbildung 18 zeigt die Funktion (5.16) für die Parameter  $\bar{v} = 1$ ,  $s = 1$  und  $h_0 = 2$ . Eine derartige Funktion wurde in [1] bei gewöhnlichen Dgln. betrachtet.

Ein verfeinertes Modell ist

$$V(h) = \bar{v} \max \left\{ 0, \frac{a \tanh(s(h - h_0)) + b}{a + b} \right\} \quad (5.17)$$

für  $h \geq 0$  mit Konstanten  $a, b, s, h_0 > 0$ . Der kritische Abstand resultiert zu

$$h_{\text{stop}} = h_0 - \frac{1}{s} \operatorname{artanh}\left(\frac{b}{a}\right). \quad (5.18)$$

Tabelle 7: Geschätzte Parameterbereiche [12].

Bezeichnung	Symbol	Parameterbereich
Reaktionszeit	$\tau$	0.5 – 2 s
Relaxationszeit	$\frac{1}{\alpha}$	0.5 – 50 s
Sensitivität	$\alpha$	0.04 – 2 s <sup>-1</sup>
Zielgeschwindigkeit	$\bar{v}$	10 – 35 ms <sup>-1</sup>
kritischer Abstand	$h_{\text{stop}}$	2 – 15 m

Die Parameter wurden an Datensätze aus japanischen Autobahnen angepasst:  $\bar{v} = 32.1384 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $h_0 = 25\text{m}$ ,  $s = 0.086 \frac{1}{\text{m}}$ ,  $a = 0.5227$ ,  $b = 0.4773$ . Mit diesen Werten folgt  $h_{\text{stop}} = 7.0319\text{m}$  aus (5.18).

Eine alternative dimensionslose Wahl mit der Skalierung  $\tilde{h} = \frac{h}{h_{\text{stop}}}$  lautet

$$\tilde{V}(\tilde{h}) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq \tilde{h} \leq 1, \\ \bar{v} \frac{(\tilde{h}-1)^3}{1+(\tilde{h}-1)^3} & \text{für } \tilde{h} > 1. \end{cases} \quad (5.19)$$

Diese Funktion ist global stetig differenzierbar. Abbildung 18 illustriert die Funktion (5.19) für den Parameter  $\bar{v} = 1$ . Tabelle 7 listet geschätzte Parameterbereiche für das gesamte Modell auf.

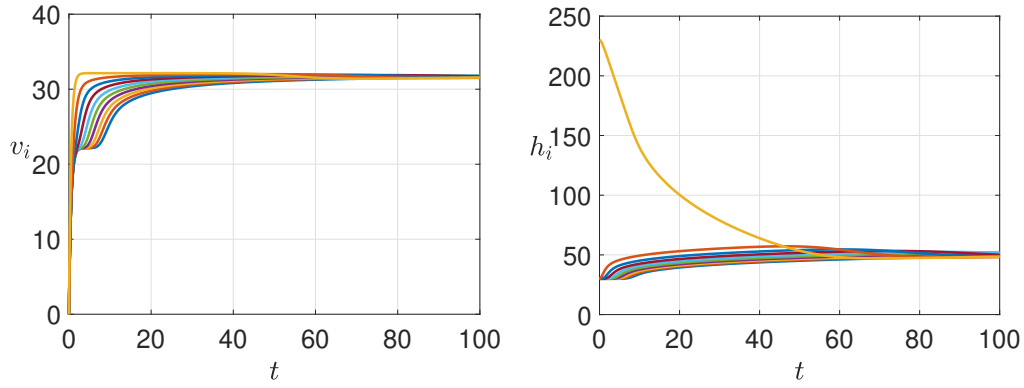
Wir lösen AWPe des Systems (5.10), (5.14) numerisch mit der Geschwindigkeitsfunktion (5.17) zu obigen Parametern im Fall  $n = 10$ . Weitere Parameter sind  $\alpha_i = 2$  und  $L = 500$ . Die Anfangswerte lauten  $x_i(0) = 30i$  und  $v_i(0) = 0$  für alle  $i$ . Abbildung 19 zeigt die Ergebnisse für die Geschwindigkeiten und die Distanzen zwischen den Fahrzeugen für drei verschiedene Verzögerungen. Im Fall  $\tau = 0.1$  und  $\tau = 1$  geht die Lösung in den stationären Zustand (5.15) über. Im Fall  $\tau = 2$  entstehen jedoch negative Distanzen, wodurch das Modell nicht mehr sinnvoll ist. Der gleiche Effekt entsteht auch für  $\tau = 1$  bei kleinerer Länge  $L$  oder kleineren Distanzen zwischen den Anfangspositionen. Als Fazit können wir ziehen, dass eine Mindestreaktionszeit in Abhängigkeit der Länge der Kreisbahn erforderlich ist, um den gewünschten Verkehrsfluss zu erzielen.

Wir transformieren (5.14) zu einem dimensionslosen System. Die Zeit wird skaliert durch  $\tilde{t} = \frac{t}{\tau}$  und der Abstand durch  $\tilde{h} = \frac{h}{h_{\text{stop}}}$  mit einem kritischen Abstand  $h_{\text{stop}} > 0$ . Es folgen die Dgln.

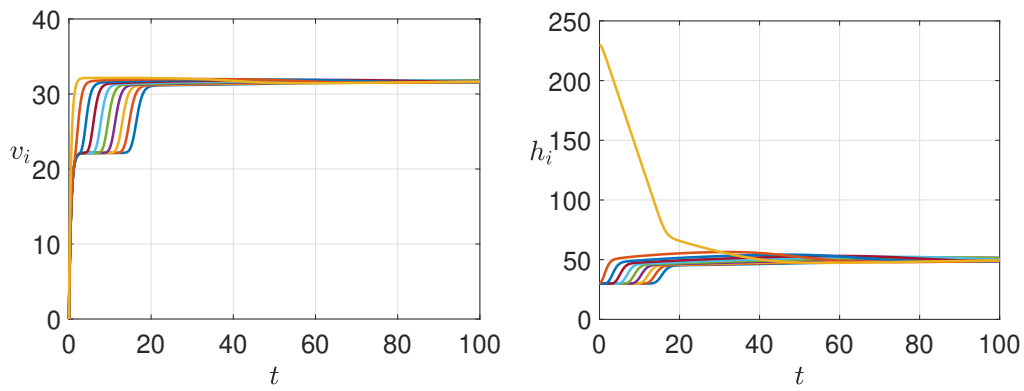
$$\begin{aligned} \frac{h_{\text{stop}}}{\tau^2} \tilde{v}'_i(\tilde{t}) &= \alpha_i \left( \frac{h_{\text{stop}}}{\tau} \tilde{V}(\tilde{h}_i(\tilde{t} - 1)) - \frac{h_{\text{stop}}}{\tau} \tilde{v}_i(\tilde{t}) \right) \\ \tilde{v}'_i(\tilde{t}) &= \tilde{\alpha}_i \left( \tilde{V}(\tilde{h}_i(\tilde{t} - 1)) - \tilde{v}_i(\tilde{t}) \right) \end{aligned}$$

mit  $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i \tau$ . Wir erhalten also wieder ein System (5.14), jetzt mit  $\tau = 1$  und  $\tilde{\alpha}_i$  statt  $\alpha_i$ .

Verzögerung  $\tau = 0.1$



Verzögerung  $\tau = 1$



Verzögerung  $\tau = 2$

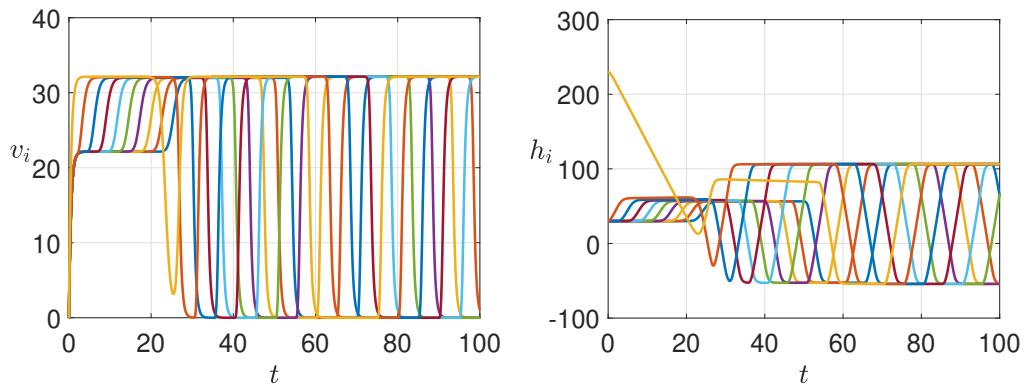


Abbildung 19: Geschwindigkeiten und Distanzen aus den Lösungen von AWPen der Dgl. (5.14) mit Funktion (5.17) zu verschiedenen Verzögerungen  $\tau$ .

Das System (5.10), (5.14) mit der Geschwindigkeitsfunktion (5.19) und  $n = 10$  wird numerisch gelöst in den beiden Fällen  $L = 20$  und  $L = 40$ . Weitere Parameter sind  $\bar{v} = 1$  und entweder  $\alpha_i = 1$  oder  $\alpha_i = 0.2$  für alle  $i$ . Die Anfangswerte sind  $x_i(0) = 1.9i$  für  $L = 20$  und  $x_i(0) = 2i$  für  $L = 40$ , während stets  $v_i(0) = 0$  für alle  $i$  gesetzt ist. Abbildung 20 enthält die Ergebnisse aus den Lösungen der AWPes. Im Fall  $L = 20$  entsteht eine oszillierende Lösung, welche einen Stau beinhaltet. Die Fahrzeuge kommen sukzessive vorübergehend zum Stillstand und beschleunigen dann wieder auf fast die Zielgeschwindigkeit. Der Stau pflanzt sich dabei entgegen der Bewegungsrichtung der Fahrzeuge fort. Ein gewisser positiver Abstand zwischen den Fahrzeugen wird dabei nie unterschritten. Im Fall  $L = 40$  gehen die Lösungen gegen den stationären Zustand (5.15). Für große Parameterwerte  $\alpha$  bleibt dieses Verhalten qualitativ bestehen. Für kleine Parameterwerte  $\alpha \leq 0.1$  entstehen negative Distanzen. Die Lösungen sind dann qualitativ wie im dritten Fall in Abbildung 19.

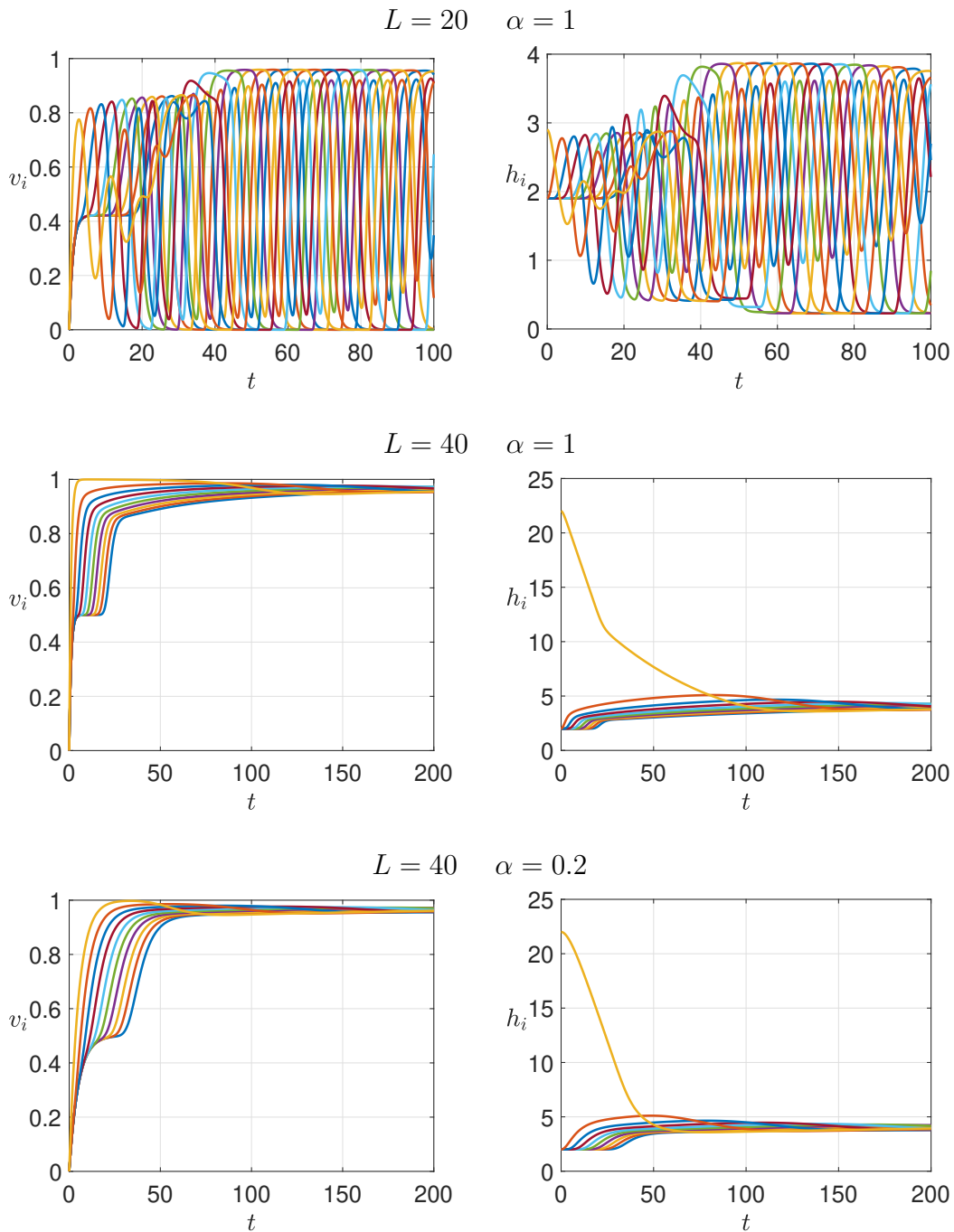


Abbildung 20: Geschwindigkeiten und Distanzen aus den Lösungen von AWPen der Dgl. (5.14) mit Funktion (5.19) zu verschiedenen Parametern.

## Literatur

- [1] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, Y. Sugiyama: Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation. *Physical Review E* 51:2 (1995), 1035-1042.
- [2] J. Bélair: Population models with state-dependent delays. in: O. Arino, D.E. Axelrod and M. Kimmel (Hrsg.), *Mathematical Population Dynamics*. Marcel Dekker, New York, 1991, S. 165-176.
- [3] A. Bellen, M. Zennaro: *Numerical Methods for Delay Differential Equations*. Oxford University Press, 2003.
- [4] L. Berezhansky, E. Braverman, L. Idels: Nicholson's blowflies differential equations revisited: main results and open problems. *Appl. Math. Model.* 34 (2010), 1405–1417.
- [5] F. Brauer, C. Castillo-Chavez: *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer, 2001.
- [6] D.R. Brillinger: The Nicholson blowfly experiments: some history and EDA. *J. Time Ser. Anal.* 33 (2012), 718–723.
- [7] T. Erneux: *Applied Delay Differential Equations*. Springer, 2009.
- [8] L. Grüne, O. Junge: *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme*. (2. Aufl.) Springer, 2016.
- [9] E. Hairer, S.P. Nørsett, G. Wanner: *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. (2. Aufl.) Springer, Berlin, 1993.
- [10] M.C. Mackey, L. Glass: Oscillation and chaos in physiological control systems. *Science* 197 (1977), 287-289.
- [11] T. Mitsui, G.D. Hu: *Numerical Analysis of Ordinary and Delay Differential Equations*. Springer, Singapore, 2023.
- [12] G. Orosz: *The Dynamics of Vehicular Traffic with Drivers' Reaction Time Delay*. PhD thesis, University of Bristol, 2005.
- [13] G. Orosz, B. Krauskopf, R.E. Wilson: Traffic jam dynamics in a car-following model with reaction-time delay and stochasticity of drivers. *IFAC Proceedings Volumes* 39:10 (2006), 199-204.
- [14] R. Pulch: Delay differential equations for epidemic models with temporary immunity. in: M. Ehrhardt, M. Günther (Hrsg.), *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2021*. Math. in Ind. Vol. 39, Springer, 2022, S. 99-106.



- [15] S. Ruan: Delay differential equations in single species dynamics. in: O. Arino, M.L. Hbid, E. Ait Dads (Hrsg.), *Delay Differential Equations and Applications*. Springer, Berlin, 2006, S. 477-517.
- [16] A. Ruehli, G. Antonini, J. Ekman: Neutral Delay Differential Equations from the PEEC Circuit Solution of Maxwell's Equation. in: Proceedings of IFAC TDS 2006, 6th Workshop on Time Delay Systems, 10-12 July, 2006, L'Aquila.
- [17] A. Sargood, E.A. Gaffney, A.L. Krause: Fixed and distributed gene expression time delays in reaction–diffusion systems. *Bull. Math. Biol.* 84 (2022), 98.
- [18] L.F. Shampine, S. Thompson: Solving DDEs in MATLAB. *Appl. Numer. Math.* 37 (2001), 441-458.
- [19] L.F. Shampine, S. Thompson: Numerical solution of delay differential equations. in: D.E. Gilsinn, T. Kalmár-Nagy, B. Balachandran (Hrsg.), *Delay Differential Equations*. Springer, 2009.
- [20] H. Smith: *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*. Springer, 2011.
- [21] R. Freund, R. Hoppe: *Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1*. (10. Aufl.) Springer, Berlin, 2007.
- [22] J. Stoer, R. Bulirsch: *Numerische Mathematik 2*. (5. Aufl.) Springer, Berlin, 2005.
- [23] C.E. Taylor, P.R. Sokal: Oscillations in housefly population sizes due to time lags. *Ecology* 57 (1976), 1060–1067.
- [24] J. Wei, M.Y. Li: Hopf bifurcation analysis in a delayed Nicholson blowflies equation. *Nonlinear Anal.* 60 (2005), 1351–1367.