Vorkurs Mathematik

Mirco Schultka

1 Einleitung

Liebe Abiturientinnen und Abiturienten,

die folgenden Erklärungen und Übungsaufgaben sind als mathematische Vorbereitung für ein Studium der Mathematik, Biomathematik oder Physik in Greifswald gedacht.

Die Schullehrpläne sind zum Teil unterschiedlich und diese Aufgaben sollen dies etwas ausgleichen. So werden in etwa die vollständige Induktion und die Mengenlehre nicht überall behandelt. Vollständige Induktion und Mengenlehre werden zwar in der Vorlesung behandelt, trotzdem ist es empfehlenswert sich die folgenden Aufgaben vorher anzusehen.

Sich mit Übungsaufgaben zu beschäftigen ist wesentlicher Bestandteil der Mathematikausbildung. Sehen Sie es als Herausforderung an, wenn Sie bei einer Aufgabe nicht sofort auf deren Lösung kommen.

~~Die Lösungen zu den Aufgaben werden in der Erstsemesterwoche ins Internet gestellt.~~

2 Gleichungen

p,q-Formel

Für folgende quadratische Gleichung

$$0 = x^2 + px + q$$

ergeben sich gemäß der p, q-Formel folgende mögliche Lösungen x_1 und x_2:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

2.1 Quadratische Gleichungen

1. Für welche Wahl des Parameters a hat die Gleichung genau eine Lösung?

$$3x^2 + ax - a = 0$$

2. Bestimmen Sie eine quadratische Gleichung mit der Lösungsmenge $\{-2, 4\}$.

3. Für welche $p, q \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $x^2 + px + q$ keine reelle Lösung?

2.2 Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

Definition: Der Betrag der Zahl $a \in \mathbb{R}$ sei wie folgt definiert:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

z.B. $|5| = 5$, $|-5| = -(-5) = 5$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt jeweils folgende Gleichung bzw. Ungleichung?

1.

$$|x^2 - x - 1| = 1$$

2.

$$\left|\frac{3x+4}{x-1}\right| = 2$$

3. (a)

$$|x-3| < 2$$

(b)

$$|x-3| > 2$$

4.

$$|x+2| + |x+3| \leq 9$$

5.

$$|x+2| = x^2$$

2.3 Lineare Gleichungssysteme

Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme und geben Sie deren Lösungsmenge an.

1.

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 6x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 &= -1 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= \frac{1}{2} \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3 \\ -3x_1 + x_2 + \frac{31}{4}x_3 &= \frac{19}{8} \end{aligned}$$

3 Logikaufgaben

1. Auf der Dreidörferinsel gab es drei Dörfer. Ein Dorf hieß Wahrheit, das zweite Unwahrheit und das dritte Halbwahrheit. Die Bewohner des ersten Dorfes sprachen also stets die Wahrheit, die des zweiten Dorfes stets die Unwahrheit, und die des dritten Dorfes abwechselnd die Wahrheit und die Unwahrheit, und zwar konnte ihre erste Anwort sowohl wahr als auch falsch sein. (War bei einem Bewohner aus dem Dorf Halbwahrheit also die erste Antwort wahr, so war die zweite Antwort falsch, die dritte wahr, die vierte falsch usw. War die erste Antwort falsch, so die zweite wahr, die dritte falsch, die vierte wahr usw.)

   Nun besuchte ein Logiker diese Insel und traf dort gleichzeitig fünf Inselbewohner: Schielauge (Sch), Bart(B), Stupsnase (St), Pausbacke (P) und Langohr (L). Um herauszubekommen, wer aus welchem Dorf stammt, bat der Logiker die ersten beiden der Reihe nach zu erzählen, wer in welchem Dorf wohnt. Schielauge antwortete, B sei ein Halbwahrer, St ein Wahrer, P ein Halbwahrer und L ein Unwahrer. Bart antwortete, Sch sei ein Halbwahrer, St ein Unwahrer, P ein Wahrer und L ein Halbwahrer. Aus diesen Antworten konnte der Logiker entscheiden, wer aus welchem Dorf stammt. Welche Überlegungen stellte er an? *Diese Aufgabe stammt aus [1] S.206*

2. Prinzessin Herzelinde wird vom „Schwarzen Ritter“ festgehalten. Ritter Lanze ist fest entschlossen, die Prinzessin zu befreien. Er trifft einen alten, weisen Mann. Als Ritter Lanze ihn nach dem Aufenthaltsort der Prinzessin fragt, erhält er folgende Antwort von dem Weisen: „Wenn Sie diesen Weg weitergehen, gelangen Sie an eine Weggabelung. Der eine Weg führt zum Schloss des „Schwarzen Ritters“, dort finden Sie die Prinzessin. Der andere Weg allerdings wird von einem großen, gefährlichen Drachen belagert. Dies werden auch Sie nicht lebend überstehen. An der Weggabelung finden Sie einen von zwei Wachmännern, die äußerlich nicht zu unterscheiden sind. Einer von ihnen sagt stets die Wahrheit, der andere stets die Unwahrheit. Bei diesem Wachmann können Sie sich nach dem Weg erkundigen. Allerdings beantwortet er Ihnen nur eine einzige Frage. Der „schwarze Ritter“ denkt, er könne Sie so überlisten. Doch ich verrate Ihnen, wenn Sie die richtige Frage stellen, kommen sie in jedem Fall zur Prinzessin.“ Welche Frage soll Ritter Lanze dem Wachmann stellen?

3. Gegeben sei ein Stapel von n Karten. Die Karten seien von 1 bis n durchnumeriert, und der Kartenstapel sei gemischt.

   Nun gehe man wie folgt vor:

   Die oberste Karte werde abgenommen. Diese habe die Nummer k und wird nun an der k-ten Stelle von oben wieder reingesteckt. Das Verfahren wird ständig wiederholt.

   Frage: Liegt in jedem Fall irgendwann die Karte mit der Nummer 1 oben?

4 Mengenlehre

Wiederholen Sie die Begriffe Vereinigung, Durchschnitt und Differenz von Mengen.

1. Gegeben seien folgende Mengen: $A = \{1, 2, 4, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 8\}$ und $C = \{1, 6, 7, 8, 9\}$.

   Bestimmen Sie:

   $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$, $A \setminus (B \cup C)$ und $A \setminus (B \cap C)$.

2. Gegeben seien folgende Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{1, 2, 9\}$

   Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

   (a) $A \subseteq B$.
   (b) $B \subseteq A$.
   (c) $C \subseteq A$.
   (d) $A \subseteq C$.
   (e) $3 \in A \cup B \cup C$.
   (f) $3 \in A \cap B \cap C$.
   (g) $2 \in A \cap B \cap C$.
   (h) $3 \in A \setminus (B \cap C)$.
   (i) $9 \notin C$.
   (j) $\{1\} \subseteq A \cap B \cap C$.

5 Aussagen

1. Formen Sie folgende Aussagen sprachlich um, indem Sie *nur* die Aussagen

   A : „ Es ist Wochenende.“ und

   B : „Ich schlafe aus.“

   und die Ausdrücke „wenn, dann“, „und“, „oder“ verwenden.

   (a) Am Wochenende schlafe ich aus.
   (b) Ich schlafe höchstens dann aus, wenn Wochenende ist.
   (c) Ich schlafe dann und nur dann aus, wenn Wochenende ist.

(d) Ich schlafe mindestens dann aus, wenn Wochenende ist.

(e) Ich schlafe höchstens dann nicht aus, wenn Wochenende ist.

Beispiel

(a) Wenn A, dann B.

6 Beweisverfahren

6.1 Vollständige Induktion

Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegegben. Um mittels vollständiger Induktion die Gültigkeit aller Aussagen $A(n)$ zu zeigen, geht man wie folgt vor:

1. *Induktionsanfang(I.A.):* Wir zeigen die Gültigkeit der Aussage $A(0)$.
2. *Induktionsschritt(I.S.):* Unter der Annahme, dass die Aussage $A(n)$ gilt, zeigen wir die Gültigkeit der Aussage $A(n+1)$.

Haben wir 1. und 2. gezeigt, so haben wir bewiesen, dass die Aussagen $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr sind.

Denn nach dem Induktionsanfang stimmt $A(0)$. Da $A(0)$ stimmt, gilt mittels Induktionsschritt auch $A(1)$. Da $A(1)$ stimmt, gilt unter erneuter Anwendung des Induktionsschritts $A(2)$. Die Gültigkeit von $A(2)$ zieht auf Grund des Induktionsschrittes die Gültigkeits von $A(3)$ nach sich. usw.

Beispiel: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ folgende Aussage:

$$0 + 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Induktionsanfang: Offensichlich gilt $A(0) : 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$.

Induktionsschritt: Wir zeigen die Gültigkeit der Aussage $A(n+1)$ und verwenden dabei die Gültigkeit der Aussage $A(n)$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + ... + n + (n+1) &= (1 + 2 + ... + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1) \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Aber das ist genau unsere Aussage $A(n+1)$. Bei dem 2. Gleichheitszeichen haben wir die Induktionsvoraussetzung verwendet.

Bemerkung Es gibt etliche Varianten der vollständigen Induktion, die man gegebenfalls auch miteinander kombinieren kann:

- Anderer Induktionsanfang:

  I.A.: $A(n_0)$ gilt.

  I.S.: Unter der Annahme, dass $A(n)$ gilt, stimmt auch $A(n+1)$.

  Dann gelten alle $A(n)$ für $n \geq n_0$.

- Verwendung aller Aussagen $A(k)$, $k \leq n$ beim Induktionsschritt:

  I.A.: $A(0)$ gilt.

  I.S.: Unter der Annahme, dass alle $A(k)$ für $k \leq n$ gelten, gilt auch $A(n+1)$.

6.2 Indirekter Beweis

Eine intuitive Vorstellung des indirekten Beweises liefert folgendes Beispiel aus dem Alltag (Alibibeweis):

Herr X steht vor Gericht und wird angeklagt. Der Staatsanwalt wirft ihm vor Person Y umgebracht zu haben. Der Verteidiger allerdings argumentiert wie folgt: Angenommen Herr X habe Person Y umgebracht, dann hätte er zur Tatzeit am Tatort, also in München sein müssen. War er aber nicht, er war nämlich in Hamburg, was auch glaubhaft bestätigt werden kann. Herr X hat also ein Alibi und kann somit nicht der Täter sein.

Sehen wir uns dieses Beispiel noch einmal genauer an:

Der Verteidiger möchte folgende Aussage A beweisen: Herr X ist unschuldig.

Dazu nimmt er das Gegenteil an („nicht A“): Herr X ist schuldig, hat also die Tat begangen. Hieraus folgert er einen Widerspruch: Herr X muss zur Tatzeit in München gewesen sein. Er war aber in Hamburg, Widerspruch. Also kann „nicht A“ nicht stimmen kann, also stimmt A.

Dies ist auch das Vorgehen beim indirekten Beweis:

Um zu zeigen, dass A gilt, nehmen wir an, dass A nicht gilt und konstruieren daraus einen Widerspruch; z.B. indem wir zeigen, dass die Aussage „nicht A“ einerseits eine Aussage C und andererseits auch die Aussage „nicht C“ impliziert. Da nicht sowohl C als auch „nicht C“ wahr sein können, kann $\neg A$ nicht stimmen, also stimmt A.

Ist insbesondere die Aussage A selbst eine Implikation, d.h. von der Form „aus B folgt C“ (oder „wenn B, so C“, kurz geschrieben „$B \Longrightarrow C$“), dann nehmen wir an, dass gleichzeitig B und „nicht C“ (kurz $\neg C$) gilt und führen dies zum Widerspruch.

6.3 Beweis durch Kontraposition

Es seien A und B zwei Aussagen. Die Aussage „wenn A, so B“ ist äquivalent zur Aussage „wenn nicht B, so nicht A“

Um also aus einer Aussage A eine Aussage B zu folgern, können wir auch aus der Verneinung von der Aussage B die Verneinung von der Aussage A folgern. Dieses Beweispinzip wird auch Beweis durch Kontraposition genannt.

An folgendem Beispiel kann man sich klarmachen, dass $A \Longrightarrow B$ äquivalent ist zu $\neg B \Longrightarrow \neg A$, nicht jedoch äquivalent zu $B \Longrightarrow A$:

- A: Es hat geregnet
- B: Die Straße ist naß.
- $A \Longrightarrow B$: Wenn es geregnet hat, dann ist die Straße naß (richtig).
- $\neg B \Longrightarrow \neg A$: Wenn die Straße nicht naß ist, dann hat es nicht geregnet (richtig).
- $B \Longrightarrow A$: Wenn die Straße naß ist, dann hat es geregnet (falsch, vielleicht hat ja auch jemand einen Eimer Wasser ausgeschüttet).

Beispielaufgabe: Man beweise durch Kontraposition:
Ist n^2 gerade, so ist n gerade (n,n^2 natürliche Zahlen).

- A: n^2 ist gerade.
- B: n ist gerade.

Wir zeigen $\neg B \Longrightarrow \neg A$:
Ist n ungerade, so existiert eine natürliche Zahl k mit

$$n = 2k - 1$$

Mit der 2. binomischen Formel erhalten wir:

$$n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2 \cdot (\underbrace{2k^2 - 2k}_{\in \mathbb{N}}) + 1$$

Damit ist n^2 ungerade.

q.e.d.

6.4 Aufgaben

1. Beweisen Sie indirekt: $\sqrt{2}$ ist irrational.
2. Machen Sie sich die Gültigkeit folgender Aussage klar: Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ läßt sich als Produkt von Primzahlen darstellen.
3. Beweisen Sie indirekt: Es existieren unendlich viele Primzahlen.
4. Beweisen Sie die Gültigkeit folgender Formel mittels vollständiger Induktion nach n:
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$
5. An einem Turnier nehmen n Mannschaften $M_1, M_2, \ldots, M_n$, $n \geq 2$, teil, bei dem jede Mannschaft gegen jede spielt. Dabei soll kein Spiel unentschieden enden. Zeigen Sie mittels Induktion, dass es dann immer eine Reihenfolge $M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots, M_{i_n}$ der n Mannschaften gibt, bei der die Mannschaft M_{i_j} gegen die Mannschaft $M_{i_{j+1}}$ (für $j = 1, 2, \ldots, n-1$) gewonnen hat.
6. Zeigen Sie mittels Induktion, 5 teilt $n^5 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
7. Zeigen sie durch Kontraposition:

   Ist a nicht durch 3 teilbar, so ist a auch nicht durch 9 teilbar.
8. Zeigen Sie durch Kontraposition:

   Ist eine natürliche Zahl m nicht durch 9 teilbar, so ist auch nicht die Quersumme von m durch 9 teilbar.

7 Funktionen

7.1 Potenzfunktionen

1. Vereinfachen Sie:
$$f(x) = \frac{x^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^3}}, \quad x > 0.$$
2. Welches Polynom ergibt sich als Ergebnis folgender Polynomdivision?
$$(3x^5 - 8x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 5x - 2) : (x^2 - 2x + 1)$$

7.2 Additionstheoreme

1. Zeigen Sie:
$$\cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^4\left(\frac{x}{2}\right) = \cos x$$
2. Leiten Sie die Gültigkeit folgender Beziehung her:
$$\sin(4\alpha) = 4 \cdot (\sin\alpha \cdot \cos^3\alpha - \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha)$$

7.3 Exponentialfunktion

1. Für eine Bakterienkultur bezeichne T die für die Verdopplung der Zellzahl erforderliche Zeit, die sogenannte Generationszeit. Diese hängt unter anderem von der Beschaffenheit des Kulturmediums ab. Nun wachse eine Bakterienkultur auf einem nährstoffreichen Medium mit Generationszeit T_1, eine andere Bakterienkultur wachse auf einem nährstoffarmen Medium mit Generationszeit T_2, $T_1 < T_2$. Die Anfangspopulation auf dem nährstoffarmen Medium sei um den Faktor b ($b > 1$) größer als die Anfangspopulation auf dem nährstoffreichen Medium. Nach welcher Zeit sind beide Populationen gleich groß?

   Zahlenbeispiel: $T_1 = 20$ Minuten, $T_2 = 50$ Minuten $b = 10$.

7.4 Der Logarithmus und die Logarithmusfunktion

7.4.1 Die Logarithmusgesetze

1. Logarithmusgesetz ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$):

$$\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c$$

2. Logarithmusgesetz ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$):

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

3. Logarithmusgesetz ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c \in \mathbb{R}$):

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$

Basisumrechnung ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$):

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

7.4.2 Aufgaben

1. Lösen Sie folgende Gleichungen mit der Definition des Logarithmus:

   (a) $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[4]{a^3} = x$, mit einem $a > 0$, $a \neq 1$

   (b) $3 \cdot \ln x = 7$

   (c) $\log_x \frac{27}{8} = -3$

   Hinweis: Hierbei ist $\ln x$ der natürliche Logarithmus, also der Logarithmus zur Basis e.

2. Berechnen Sie mit Hilfe der Logarithmusgesetze:

$$\ln \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{9}{4}$$

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung: $x^4 \cdot x^{\ln x} = e^5$

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung (mit einem $a > 0$, $a \neq 1$)

$$\log_a \sqrt[3]{\frac{a^{8x+2}}{a^{x+1}}} - \log_a \sqrt{a^{3x}} = \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}$$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung: $\log_8 x - \log_2 x = 2$

8 Grenzwerte

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = a_1, a_2, a_3, \ldots$ reeller Zahlen konvergiert für n gegen unendlich gegen $a \in \mathbb{R}$ (Schreibweise: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$) genau dann, wenn es zu jedem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ einen Index $N = N(\varepsilon)$ gibt, so dass für alle Folgenglieder a_n mit einem Index größer gleich N ($n \geq N$) gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon. \tag{2}$$

Eine Folge, welche gegen Null konvergiert bezeichnet man auch als Nullfolge.

Bemerkung:

- Der Index N hängt im allgemeinen von ε ab, was durch die Schreibweise $N = N(\varepsilon)$ ausgedrückt wird.
- Die Forderung (2) bedeutet, dass der Abstand von a_n zu a weniger als ε beträgt: $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Das offene Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ wird auch als ε-Umgebung von a bezeichnet.

Grenzwertsätze:

1. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, so konvergiert die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n := c \cdot a_n$ ebenfalls, mit Grenzwert $c \cdot a$:

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$$

2. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, so konvergiert die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls, und zwar mit Grenzwert $a + b$:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

3. Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, so konvergiert die Folge $(1/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls, und zwar mit Grenzwert $1/b$:

$$\lim_{n\to\infty} (1/b_n) = 1/b$$

   ($1/b_n$ ist für hinreichend große n korrekt definiert).

8.1 Aufgaben

1. Zeigen Sie mit Hilfe der ε-Definition, dass die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

   Tip: Bestimmen Sie für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ einen Index $N = N(\varepsilon)$, so dass gilt:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon,$$

   für $n \geq N$.

2. Zeigen Sie mit Hilfe der ε-Definition, dass die Folge

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots,$$

   also die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

   eine Nullfolge ist.

3. Berechnen Sie unter Verwendung von 1. ($\frac{1}{n}$ Nullfolge) und der Grenzwertsätze folgende Grenzwerte:

   (a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n}$$

   (b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-4n^3 - 3n}{2n^3 + 5}$$

   Tip: Formen Sie die Brüche geeignet um.

9 Analytische Geometrie

1. Lagebeziehung von Geraden: Wie liegen die beiden Geraden g und h zueinander (echt parallel, identisch, 1 Schnittpunkt oder windschief)? Falls die Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen, berechnen Sie ihn.

   (a)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ -0,5 \\ 2 \end{pmatrix} ; u \in \mathbb{R}$$

   (b)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} ; u \in \mathbb{R}$$

2. Bestimmen Sie die Lagebeziehung der Geraden g zur Ebene ε (parallel, Gerade liegt in der Ebene, 1 Schnittpunkt). Falls sie einen gemeinsamen Schnitpunkt haben, berechnen Sie ihn.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R}$$

3. Bestimmen Sie die Lagebeziehung der beiden Ebenen ε_1 und ε_2 zueinander (parallel, identisch, Schnitt in einer Geraden). Falls die Ebenen sich in einer Geraden schneiden, geben Sie eine Gleichung der Geraden in Parameterform an.

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} ; t, u \in \mathbb{R}$$

Literatur

[1] Konforowitsch, A.G. Logischen Katastrophen auf der Spur. Leipzig, Fachbuchverlag, 1992.