Geben Sie bitte bei allen Aufgaben nicht nur Ergebnisse, sondern auch Ihre Ansätze und Rechenwege an. Nutzen Sie beim Rechnen bitte mindestens 2, maximal 4 Kommastellen.

Aufgabe 1: Von 5 Versuchspersonen wurden die vier Merkmale X_1: *Augenfarbe*, X_2: *Gesundheitszustand* (auf einer "Zensuren"-Skala von 1 bis 12), X_3: *Systolischer Blutdruck* und X_4: *Diastolischer Blutdruck* erfasst.
a) Bestimmen Sie den *Modalwert* x_{Mod} der X_1-Werte *braun, grün, blau, braun, braun* sowie den *Median* $\tilde{x}$ der erfassten X_2-Werte $7, 3, 10, 8, 11$.
b) Wie würde sich der Median $\tilde{x}$ ändern, wenn noch ein sechster X_2-Wert 9 hinzukäme?
c) Aus den erhobenen X_3- und X_4-Messwerten wurde der Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient $r = +0.804$ berechnet. Was sagt dieser Wert bezüglich X_3, X_4 konkret aus?

Aufgabe 2: Von 18 zwölfjährigen Kindern wurde die *Anzahl kariöser Zähne* X erfasst. Es ergaben sich die Messwerte $(0, 0, 0, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$.
a) Berechnen Sie aus den gegebenen Messwerten das *arithmetische Mittel* $\overline{x}$, die *beobachtete Varianz* $s_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ sowie die zugehörige *Standardabweichung* s_X.
b) Bestimmen Sie für die wahre *mittlere Anzahl* μ_X *kariöser Zähne* in der Population zwölfjähriger Kinder einen geeigneten *Punktschätzer* sowie das 95%-*Konfidenzintervall.*
c) Geben Sie an, welche der folgenden Interpretationen für das von Ihnen unter b) berechnete Konfidenzintervall $[s, t]$ zutreffend sind und welche falsch sind:
- In der Pop. zwölfjähriger Kinder ist mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit $s \leq \mu_X \leq t$ erfüllt.
- Die wahre mittlere Anzahl kariöser Zähne μ_X liegt zu 95% in $[s, t]$, zu 5% aber nicht.
- Unter 100% analog berechenbarer Intervalle gibt es 95% Beispiele, welche μ_X überdecken und 5% Beispiele, die μ_X nicht enthalten. Zu welcher Sorte $[s, t]$ gehört, ist unklar.
- Mit den konkreten Grenzen $[s, t]$ liegt aus der Menge aller möglicher analog bestimmbarer Konfidenzintervalle zu 95% ein Vertreter vor, bei dem die Intervallgrenzen μ_X einschließen.

Aufgabe 3 : Wir betrachten folgendes Zufallsexperiment, welches dem zweifachen Werfen eines dreiseitigen Würfels entspricht: Im 1. Versuch wird jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ eine *Eins* oder eine *Zwei* oder eine *Drei* gezogen und in einem 2. Versuch wird dann dieselbe Prozedur wiederholt. Modellieren Sie die Ergebnismenge Ω aller erzeugbaren Zahlenpaare derart, dass die Laplace-Eigenschaften erfüllt sind.
a) Geben Sie die zwei Ereignisse A: *Beide Zahlen sind ungerade* und B: *Beide Zahlen sind verschieden* in Mengenschreibweise als Teilmengen der Laplace-Ergebnismenge Ω an.
b) Überprüfen Sie, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind. Geben Sie dabei nicht nur Ihre Entscheidung, sondern auch deren Begründung an!
c) Geben Sie für die Zufallsgröße X: *Augensumme* alle Werte x_i und deren Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ an. Berechnen Sie dann Erwartungswert und Varianz von X.

Aufgabe 4: Wir betrachten das Generieren einer 3-stelligen Symbolfolge, wobei pro Symbol mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder eine *Null* oder eine *Eins* möglich ist, als Zufallsexperiment mit erfüllten Laplace-Eigenschaften.

a) Geben Sie die Ergebnismenge Ω in Mengenschreibweise an und bestimmen Sie $|\Omega|$.

b) Geben Sie die beiden Ereignisse $C = (A \cap B)$ sowie $D = \overline{(A \cup B)}$ in Mengenschreibweise an, wenn $A, B \subset \Omega$ folgendes bedeuten: *A: Alle Symbole sind gleich* und *B: Es treten genau doppelt so viele Einsen wie Nullen auf.*

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ und $P(D)$.

Aufgabe 5: Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist,

a) beim Werfen von drei sechsseitigen Würfeln als Augenzahlen-Produkt 10 zu erhalten;

b) aus 5 Samen mindestens 4 Keimlinge zu erhalten, wenn jeder Same zu 90% aufgeht;

c) höchstens genauso viel Ausschuss wie einwandfreie Exemplare zu erhalten, wenn man eine Stichprobe vom Umfang $n = 4$ mit einem Griff aus einer Sendung von 25 Werkstücken herauszieht, unter denen sich insgesamt genau 5 Ausschuss-Stücke befinden;

d) beim 6-maligen Werfen eines sechsseitigen Laplace-Würfels genau die in einer solchen Versuchsserie zu erwartende durchschnittliche Anzahl *Zweien* zu erhalten;

e) mindestens einen Sonnentag unter 8 Urlaubstagen genießen zu können, wenn die Wahrscheinlichkeit für sonniges Wetter für jeden dieser Urlaubstage 60% beträgt;

f) genau doppelt so viele Nieten wie Gewinne zu erhalten, wenn man 9 Lose ohne Zurücklegen zufällig aus einer Urne zieht, die 28 Nieten und 12 Gewinne enthält.

Aufgabe 6: Von einer stetigen Zufallsgröße X ist die Verteilungsfunktion F gegeben, welche den Wert $F(x) = 0$ auf dem Intervall $]-\infty, 4[$ und den Wert $F(x) = 1$ auf $]8, +\infty[$ annimmt. Für $x \in [4, 8]$ gilt $F(x) = \frac{1}{4} \cdot (x - 4)$.

Bestimmen und interpretieren Sie den Wert $F(x = 7)$ sowie das 25%-Quantil $\tilde{x}_{0.25}$.
Berechnen Sie $E(X)$ und $V(X)$.

Aufgabe 7: Für eine Einschätzung des Konsums illegaler Drogen geht man von folgenden Wahrscheinlichkeiten aus: 11% der Gesamtpopulation sind Kinder unter 14 Jahren, 7% sind Jugendliche zwischen 14 und 18 Jahren und 82% sind Erwachsene über 18 Jahren. Man nimmt an, dass unter den Kindern 1%, unter den Jugendlichen 12% und unter den Erwachsenen 25% illegale Drogen konsumieren.

a) Wie viel Prozent der Gesamtpopulation nimmt unter diesen Annahmen illegale Drogen?

b) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(E|D)$, wobei E : *Erwachsene* und D: *Konsumenten illegaler Drogen* bedeuten.

c) Geben Sie in Form eines Antwortsatzes an, welchen Bevölkerungsanteil die von Ihnen unter b) berechnete bedingte Wahrscheinlichkeit $P(E|D)$ ausdrückt.

Aufgabe 8: Die als "Schrecksekunde" bekannte *Reaktionsdauer* auf Ereignisse im Straßenverkehr beträgt nicht bei jedem Kraftfahrer haargenau 1 Sekunde, sondern kann in der Bevölkerung durch eine normalverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $\mu_X = 1s$ und $\sigma_X = 0.125s$ modelliert werden. Bestimmen Sie, wie groß unter diesen Annahmen die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 1.105\ s)$ ist.

Aufgabe 9: Von 18 unterschiedlichen Flüssen wurde jeweils deren *Nitratgehalt* X in $\frac{mg}{l}$ erfasst. Aus diesen Messwerten ergaben sich das arithmetische Mittel $\overline{x} = 3.3\frac{mg}{l}$ sowie die geschätzte Standardabweichung $\hat{\sigma}_X = s_{korr} = 1.7\frac{mg}{l}$. Für die Population aller betrachteter Flüsse nehmen wir an, dass der Nitratgehalt X normalverteilt ist.

a) Stellen Sie die 3 Hypothesenpaare aus H_0 und H_1 für einen *ungerichteten* (d.h. 2-seitigen), *rechtsseitigen* und *linksseitigen* Einstichproben-t-Test mit $\mu_0 = 2.5\ \frac{mg}{l}$ auf.

b) Bestimmen Sie die 3 zugehörigen Akzeptanzbereiche der Nullhypothese H_0 zum Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ und geben Sie diese an.

c) Berechnen Sie mittels der Informationen über das Datenmaterial die Teststatistik t_{emp}.

d) Fällen Sie die Testentscheidungen für alle unter a) gestellten Hypothesenpaare.

Aufgabe 10: Für einen neuen Studiengang wird kalkuliert, dass von den Studienanfängern 40% eine Wartezeit von 0 Semestern, 30% *ein* Semester, 15% *zwei* Semester, 10% *drei* Semester und der Rest 4 Semester seit dem Abitur hinter sich haben.
Berechnen Sie für die beschriebene Zufallsgröße X: *Anzahl Wartesemester* die zu erwartende mittlere Anzahl $E(X)$ sowie die zugehörige Standardabweichung $\sqrt{V(X)}$.

Aufgabe 11: Folgende Kreuztabelle fasst Datenmaterial zusammen, welches von 200 Studierenden zum möglicherweise bestehenden Zusammenhang zwischen den Merkmalen X: *Studienfach* und Y: *Schulform für die Hochschulreife* erhoben wurde.

	Gymnasium	Abendgymnasium	Fach-/Berufsoberschule	$\sum$
Gesundheit/Soziales	21	3	16	40
Wirtschaft	80	18	22	120
Naturwissenschaft	29	4	7	40
$\sum$	130	25	45	200

a) Stellen Sie H_0 und H_1 für einen χ^2-Unabhängigkeitstest bzgl. X und Y auf.

b) Bestimmen Sie die bei stochastischer Unabhängigkeit von X und Y erwarteten absoluten Paar-Häufigkeiten $E_{i,j}$ für $i = 1, 2, 3$ und $j = 1, 2, 3$.

c) Begründen Sie, dass die Voraussetzungen des χ^2-Verfahrens für die gegebenen Daten erfüllt sind und somit die χ^2-Verteilung als Prüfverteilung verwendet werden darf.

d) Berechnen Sie aus den Stichprobendaten die Teststatistik χ^2_{emp}.

e) Geben Sie den Akzeptanzbereich von H_0 zum Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ an und fällen Sie anhand der Teststatistik χ^2_{emp} eine Testentscheidung.

f) Formulieren Sei als Antwortsatz, was Sie mit Ihrem Testergebnis bezogen auf die Fragestellung der Studie gezeigt haben.

g) Begünden Sie, dass Ihre unter f) gefällte Testentscheidung mit einem Fehler 1. Art behaftet ist und geben Sie an, wie das gewählte Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ damit zuammenhängt.

h) Geben Sie den Akzeptanzbereich von H_0 und die Testentscheidung bei $\alpha = 1\%$ an.

i) Entscheiden Sie, ob Ihre unter h) gefällte Testentscheidung mit einem Fehler 1. Art oder 2. Art behaftet ist und formulieren Sie, was dieser Fehler für das vorliegende Beispiel konkret bedeutet.

Kleine Quantilstabellen (df : Anzahl der Freiheitsgrade)

Quantile d. Standardnormalverteilung N(0,1)		Quantile der t-Verteilung $t_{df,q}$				Quantile der χ^2-Verteilung $\chi^2_{df,q}$		
q	Quantil z_q	df	q=95%	q=97,5%	q=99%	df	q=95%	q=99%
50,0%	0,000	17	1,740	2,110	2,567	1	3,84	6,63
80,0%	0,840	18	1,734	2,101	2,552	2	5,99	9,21
90,0%	1,282	19	1,729	2,093	2,539	3	7,81	11,34
95,0%	1,645	20	1,725	2,086	2,528	4	9,49	13,28
97,5%	1,960	21	1,721	2,080	2,518	5	11,07	15,08
99,0%	2,326	22	1,717	2,074	2,508	6	12,59	16,81