Übungsblatt 11 (Stoch. Unabhängigkeit, χ^2-Tests) WS 2018/19 P. Gummelt

ÜA 1: Wir werfen einen fairen sechsseitigen Würfel zweimal, beschreiben Ω als Laplace-Ergebnismenge und betrachten die folgenden Ereignisse:
A: Pasch; *B: Beide Augenzahlen sind gerade*; *C: Produkt beider Augenzahlen ist* ≥ 25.
Begründen Sie mittels geeigneter Prüfformeln, dass die Ereignisse B und C stochastisch *unabhängig* sind, die Ereignisse A und B aber stochastisch *abhängig* sind.

ÜA 2: Mit einem χ^2-Unabhängigkeitstest soll beim Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ untersucht werden, inwieweit in der Population von Gemüsepaprika ein Zusammenhang zwischen *Farbe* und *Form* glaubhaft ist oder nicht. An 100 Gemüsepaprika wurden dazu die Merkmale X: *Form* (*länglich, blockig*) und Y: *Farbe* (*grün, gelb, rot*) erfasst, wobei 30 von *länglicher* und 70 von *blockiger* Form waren. 35 Paprika hatten *gelbe* Farbe und es gab 6 *längliche gelbe* Exemplare. Von den blockförmigen Paprikaschoten war die Hälfte *rot*, unter den länglichen Paprika waren 60% *rot*farbig.
a) Erstellen Sie eine Kreuztabelle mit den in der SP beobachteten absoluten Häufigkeiten.
b) Berechnen Sie die zugehörigen 6 erwarteten absoluten Paar-Häufigkeiten E_{ij}, die bei perfekter stochastischer Unabhängigkeit von X und Y gelten müssten.
c) Stellen Sie die Hypothesen H_0 und H_1 für einen χ^2-Unabhängigkeitstest auf.
d) Begründen Sie, warum die χ^2-Verteilung als Prüfverteilung angewendet werden darf.
e) Geben Sie den Akzeptanzbereich von H_0 an und berechnen Sie die Teststatistik χ^2_{emp}.
f) Fällen Sie eine Testentscheidung (zum Vergleich: p-value(SPSS)=0.066. Was bedeutet Ihr Testergebnis in Bezug auf die Frage nach einem Zusammenhang zwischen X und Y?
g) Drücken Sie das Signifikanzniveau als bedingte Wahrscheinlichkeit $P(...|...) = \alpha$ aus.

ÜA 3: Von 20 Jungen und 30 Mädchen im Grundschulalter wurde erfasst, ob sie eine Brille tragen müssen oder nicht. Insgesamt gab es 15 Kinder mit Sehhilfe und 35 ohne.
a) Welche erwarteten Paar-Häufigkeiten E_{ij} erhält man bei diesen Daten für den Fall perfekter stochastischer Unabhängigkeit von X: *Geschlecht* und Y: *Sehhilfe* in der Pop.?
b) Wenn die Daten für einen χ^2-Unabhängigkeitstest bei $\alpha = 5\%$ verwendet werden würden, für welche Kreuztabellen aus beobachteten absoluten Paar-Häufigkeiten H_{ij} würde H_0 abgeleht werden, für welche nicht? Geben Sie jeweils eine Beispiel-Kreuztabelle an!

ÜA 4: Es soll die These geprüft werden, dass in der Bevölkerung 1% *Montag*, 2% *Dienstag*, 3% *Mittwoch*, 4% *Donnerstag*, 10% *Freitag*, 30% *Samstag* und 50% *Sonntag* als Lieblingstag haben. 350 Testpersonen wurden deshalb gefragt, auf welchen Tag der Woche sie sich in der Regel am meisten freuen. Die entsprechenden 350 Antworten lauteten: 1-mal *Mo*, 2-mal *Di*, 4-mal *Mi*, 6-mal *Do*, 33-mal *Fr*, 120-mal *Sa* und 184-mal *So*.
a) Geben Sie H_0 und H_1 für einen χ^2-Anpassungstest an, der die Glaubwürdigkeit der geschilderten Vermutung für die Bevölkerung beim Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ prüft.
b) Begründen Sie, warum die χ^2-Verteilung als Prüfverteilung angewendet werden darf.
c) Geben Sie den Akzeptanzbereich von H_0 an und berechnen Sie die Teststatistik χ^2_{emp}.
d) Fällen Sie eine Testentscheidung (Vergleich: p-value(SPSS)=0.011) und formulieren Sie in Worten, was Ihr Ergebnis in Bezug auf die Ausgangsfragestellung bedeutet.
e) Drücken Sie den p-value als bedingte Wahrscheinlichkeit $P(...|...) = 0.011$ aus.
f) Wie wäre Ihre Testentscheidung ausgefallen, wenn als Signifikanzniveau nicht $\alpha = 5\%$, sondern $\alpha = 1\%$ gewählt worden wäre?
g) Wie wäre Ihr χ^2-Anpassungstest bei $\alpha = 5\%$ verlaufen, wenn unter H_0 vermutet worden wäre, dass die *Lieblingswochentage* in der Bevölkerung *diskret gleichverteilt* auftreten?