

Übungen in Algebra und Zahlentheorie

SS19

Aufgabe 1 Konstruiere ein regelmäßiges Fünfeck, allein mit Zirkel und Lineal.

Aufgabe 2 Löse die kubische Gleichung

$$x^3 + 3x^2 - 3 = 0$$

mit Hilfe der Formel von Cardano.

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen mit der Addition $+$.

(1) Zeige, dass auf dem kartesischen Produkt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch die Beziehung

$$(a, b) \sim (c, d) \quad :\Leftrightarrow \quad a + d = b + c$$

eine Äquivalenzrelation definiert ist.

(2) Es bezeichne $A := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Geben Sie eine Bijektion zwischen A und der Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen an. Wie schreibt man z.B. die Klasse $[(1, 2)]$ in \mathbb{Z} ?

(3) Definieren Sie nun eine Addition, Subtraktion und Multiplikation auf A .

Aufgabe 4 Bestimmen Sie mit dem Sieb des Eratosthenes alle Primzahlen zwischen 1 und 100.

Aufgabe 5 Sei

$$n = \prod_{j=1}^N p_j^{k_j} \in \mathbb{N}$$

ein Produkt von Primzahlpotenzen, d.h. N und $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_1, \dots, p_N .

(a) Wie viele Teiler hat die natürliche Zahl n in \mathbb{N} ?

(b) Wie viele Teiler besitzt die Zahl 84?

(c) Wie viele Zahlen zwischen 1 und 100 besitzen eine ungerade Anzahl von Teilern?