Universität Greifswald
F. Leitner

Übungsblatt 2 vom 11. April 19

Übungen in Algebra und Zahlentheorie

SS19

Aufgabe 6 (schriftlich) Benutzen Sie Division mit Rest, um folgende Aussagen zu beweisen:

(1) Die dritte Potenz einer beliebigen ganzen Zahl ist von der Form $9k$, $9k+1$ oder $9k+8$ für geeignetes $k \in \mathbb{Z}$.

(2) Jede vierte Potenz ist von der Form $5k$ oder $5k+1$ für geeignetes $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 7 (schriftlich) Gegeben seien natürliche Zahlen $k, m, n \in \mathbb{N}$ mit $n = mk$.

(1) Beweisen Sie
$$(a^m - b^m) \mid (a^n - b^n)$$
für alle ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$.

(2) Sei nun k ungerade. Beweisen Sie
$$(a^m + b^m) \mid (a^n + b^n)$$
für alle ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 8 (schriftlich) (a) Berechnen Sie die Faktorisierung der Zahl -1601320.

(b) Zeigen Sie

(i) Jede Primzahl der Form $3n+1$ hat auch die Form $6m+1$.

(ii) Jede ganze Zahle der Form $3n+2$ hat auch einen Primfaktor dieser Form.

(iii) Die einzige Primzahl der Form $n^2 - 4$ ist die Zahl 5.

(iv) Die einzige Primzahl der Form $n^3 - 1$ ist die Zahl 7.

Aufgabe 9 Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler
$$d = ggT(12378, 3054)$$
mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

Aufgabe 10 Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen, d.h. $|\mathbb{P}| < \infty$. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Annahme
$$\infty > \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,.$$

Abgabe der schriftlichen Aufgaben vor Beginn der Übung am 11.4.19!