Voraussetzungen

Vorausgesetzt werden gute Kenntnisse über die Themen des Moduls "Lineare Algebra und analytische Geometrie", sowie Vertrautheit mit metrischen Räumen im Rahmen des "Analysis II" Moduls (vgl. [Que01, Kapitel 1]); Vorkenntnisse in "Mengentheoretische Topologie" und "Algebraische Topologie" wären hilfreich, sind aber nicht notwendig.

Beschreibung

Topologische Datenanalyse (TDA) ist ein Teilgebiet der angewandten Mathematik, in welchem Methoden der (algebraischen) Topologie zur Analyse von Datensätzen benutzt werden. Das Herausarbeiten von Informationen aus hochdimensionalen, lückenhaften oder verrauschten Datensätzen ist ein anspruchsvolles und bedeutendes Problem angewandter Wissenschaften. Leitgedanke der TDA ist die Idee, dass Topologie und Geometrie leistungsstarke Werkzeuge zur Erschließung qualitativer und quantitativer Informationen über die Struktur von Daten liefern können.

Ziel des Seminars wird es sein das derzeitige Hauptwerkzeug der TDA kennenzulernen – die persistente Homologie. Diese wurde in den vorreitenden Arbeiten [ELZ02] und [ZC04] vorgestellt und durch [Car09] bekannt gemacht.

Seitdem fanden sich unter anderem Anwendungen in der Biologie, Bildanalyse, Materialwissenschaften, und Physik für topologische Datananalyse – für eine kleine Auswahl von Referenzen sei auf den Abschnitt "Classification of applications" im Wikipedia-Artikel "Topological data analysis" verwiesen.

Ablauf

Am ersten Termin werde ich einen Einstiegsvortrag halten, in welchem ich die Themen der Vorträge 1 - 9 skizziere. Direkt im Anschluss wird die Themenvergabe stattfinden. Nachdem die notwendigen Vorträge zugeordnet wurden, können nach Interesse der Besucher die vorgestellten optionalen Themen gewählt werden. Auch die Vorstellung eines eigens ausgewählten optionalen Themas ist nach Absprache möglich.

Notwendige Vortragsthemen

Es werden jeweils Begriffe genannt die in den Vorträgen vorkommen sollten. Die Hauptreferenz wird jeweils den kompletten zu präsentierenden Stoff enthalten. Alle weiteren Referenzen enthalten möglicherweise nur Teile des Stoffs, können aber als hervorragende Quelle zur Gewinnung anderer Sichtweisen auf den Stoff verwendet werden.

Vortrag 1: Topologische Räume

Topologische Räume und stetige Abbildungen mit Beispielen und Gegenbeispielen, durch Metrik induzierte Topologie (Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$), *Basis einer Topologie*, *Teilraumtopologie*, *kompakte Räume*

Hauptreferenz: [Que01, Kapitel 2, Kapitel 8.A]
Weitere Referenzen: [Jän05, Kapitel 1]

Vortrag 2: Homotopie

Homotopie, *Homotopieäquivalenz*, *Retrakt*, *Deformationsretrakt*, Beispiele, *Kategorien*, Beispiele, *Homotopiekategorie*

Hauptreferenz: [Jän05, Kapitel 5]
Weitere Referenzen: [Hat02, I.1 s.1-4], [FF16, Kapitel 2.5, Kapitel 3.1-3.4]

Vortrag 3: Simplizialkomplexe

Abstrakte Simplizialkomplexe und *Simplizialkomplexe* mit Beispielen, Konstruktion von abstrakten Simplizialkomplexen aus Punktmengen (*Čech-Komplex*, *Vietoris-Rips-Komplex*), *Nerv einer Überdeckung*, Nerv-Theorem

Hauptreferenz: [EH09, S. III.1, III.2]
Weitere Referenzen: [BCY18, Kapitel 2], [Hat02, S.102-104], [Rob16, Lecture 5], [Jän05, Kapitel 7.1]

Vortrag 4: Simpliziale Homologie

Kettenkomplexe, *Homologie eines Kettenkomplexes*, Kettenkomplex eines Simplizialkomplexes, Singulärer Kettenkomplex, *Simpliziale Homologie*, *Singuläre Homologie*, *Bettizahlen*, Funktorialität von Homologie, Beispielrechnung(en), Kettenhomomorphismen, induzierte Abbildungen, Homotopieinvarianz von singulärer Homologie

Hauptreferenz: [Hat02, Kapitel IV.1 s.97-101, s.105-113]
Weitere Referenzen: [EH09, Kapitel IV.1], [FF16, Kapitel 12.1-12.3], [Rob16, Lecture 6-8, 10, 11]

Vortrag 5: Exakte Sequenzen

Relative Homologie, Beispielrechnungen, Lange exakte Sequenz von Paaren, Vergleich von simplizialer und singulärer Homologie, Mayer-Vietoris-Sequenz (wenn die Zeit reicht)

Hauptreferenz: [Hat02, IV.1 s.113-130, Kapitel IV.2 s.149-153]
Weitere Referenzen: [EH09, S. IV.3, IV.4]

Vortrag 6: Morsetheorie und Filtrationen

Glatte Mannigfaltigkeiten, *Morsefunktionen*, stückweise lineare Funktionen auf Simplexen, *Filtration*, Subniveaumengenfiltration einer Morsefunktion, Filtrationen durch Familien von Čech- und Vietoris-Rips-Komplexen

Hauptreferenz: [EH09, Kapitel IV.1, IV.3]

Vortrag 7: Persistente Homologie

Persistentenz-Modul, Persistente Homologie einer Filtration, *Interval-Moduln*, Zerlegbarkeit in Interval-Moduln,*Persistenz Diagramm*, *Strichcode*, *Geburt* und *Ableben* von Klassen, Beispiele

Hauptreferenz: [Cha+12, Abschnitt 1]
Weitere Referenzen: [CM17, Abschnitt 5.1-5.3], [EH09, Kapitel VII.1], [BCY18, Kapitel 11.5]

Vortrag 8: Stabilität der persistenten Homologie

Bottleneck-Metrik, *Wasserstein*-Metrik, Stabilitättheoreme [CM17, Theorem 7-9], Schätzung der persistenten Homologie eines metrischen Raums, Konfidenzbereiche für persistente Homologie

Hauptreferenz: [CM17, Abschnitt 5.5-5.7]
Weitere Referenzen: [EH09, S. VIII.2], [BCY18, Kapitel 11.5]

Vortrag 9: Die GUDHI-Library

Original vorgestellt in [Mar+14]. Präsentierbares Anwendungsbeispiel: [CM17, Abschnitt 6]

Optionale Vortragsthemen

Es werden jeweils Referenzen zu möglichen Arbeiten angegeben, welche im Rahmen des Vortrags diskutiert werden könnten.

Theorie: Moderne TDA-Algorithmen

[BDM15], [BM12]

Anwendung: Zeitreihenanalyse

[Ume17]

Anwendung: Genexpressionsanalyse

[EH09, Abschnitt IX.1]

Anwendung: Oberflächen-Segmentierung

[Skr+10]

Literatur

[Que01] Boto von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie*. Springer Berlin Heidelberg, 2001. DOI: 10.1007/978-3-642-56860-2.

[ELZ02] Edelsbrunner, Letscher und Zomorodian. „Topological Persistence and Simplification". In: *Discrete & Computational Geometry* 28.4 (Nov. 2002), S. 511–533. DOI: 10.1007/s00454-002-2885-2.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Pr., 2002. 556 S. ISBN: 0521795400. URL: https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html.

[ZC04] Afra Zomorodian und Gunnar Carlsson. „Computing Persistent Homology". In: *Discrete & Computational Geometry* 33.2 (Nov. 2004), S. 249–274. DOI: 10.1007/s00454-004-1146-y.

[Jän05] Klaus Jänich. *Topologie*. Springer Berlin Heidelberg, 2005. DOI: 10.1007/b138142.

[Car09] Gunnar Carlsson. „Topology and data". In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 46.2 (Jan. 2009), S. 255–308. DOI: 10.1090/s0273-0979-09-01249-x.

[EH09] Herbert Edelsbrunner und John L. Harer. *Computational Topology: An Introduction*. American Mathematical Society, 2009. ISBN: 978-0821849255. URL: https://www2.cs.duke.edu/courses/fall06/cps296.1/.

[Skr+10] Primoz Skraba u. a. „Persistence-based segmentation of deformable shapes". In: *2010 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition - Workshops*. IEEE, Juni 2010. DOI: 10.1109/cvprw.2010.5543285.

[BM12] Jean-Daniel Boissonnat und Clément Maria. „The Simplex Tree: An Efficient Data Structure for General Simplicial Complexes". In: *Algorithms – ESA 2012*. Springer Berlin Heidelberg, 2012, S. 731–742. DOI: 10.1007/978-3-642-33090-2_63.

[Cha+12] Frederic Chazal u. a. „The structure and stability of persistence modules". In: (16. Juli 2012). arXiv: http://arxiv.org/abs/1207.3674v3 [math.AT].

[Mar+14] Clément Maria u. a. „The Gudhi Library: Simplicial Complexes and Persistent Homology". In: *Mathematical Software – ICMS 2014*. Springer Berlin Heidelberg, 2014, S. 167–174. DOI: 10.1007/978-3-662-44199-2_28.

[BDM15] Jean-Daniel Boissonnat, Tamal K. Dey und Clément Maria. „The Compressed Annotation Matrix: An Efficient Data Structure for Computing Persistent Cohomology". In: *Algorithmica* 73.3 (Apr. 2015), S. 607–619. DOI: 10.1007/s00453-015-9999-4.

[FF16] Anatoly Fomenko und Dmitry Fuchs. *Homotopical Topology*. Springer International Publishing, 2016. DOI: 10.1007/978-3-319-23488-5.

[Rob16] Michael Robinson. *MATH 496/696 Computational Algebraic Topology*. Videoaufzeichnung. 2016. URL: https://www.youtube.com/playlist?list=PLSekr_gm4hWLRNHB5-sbajyUzN5tLOZmx.

[CM17] Frédéric Chazal und Bertrand Michel. „An introduction to Topological Data Analysis: fundamental and practical aspects for data scientists". In: (11. Okt. 2017). arXiv: http://arxiv.org/abs/1710.04019v1 [math.ST].

[Ume17] Yuhei Umeda. „Time Series Classification via Topological Data Analysis". In: *Transactions of the Japanese Society for Artificial Intelligence* 32.3 (2017), D–G72_1–12. DOI: 10.1527/tjsai.d-g72.

[BCY18] Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal und Mariette Yvinec. *Geometric and Topological Inference*. Cambridge University Press, Sep. 2018. DOI: 10.1017/9781108297806.