# Prüfungsfragen
# Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Die nachfolgende Zusammenstellung enthält vor allem Klausuraufgaben aus den Jahren 2000 bis 2011. Hierbei wurden die Aufgaben thematisch geordnet, nicht nach Jahren. Die Reihenfolge der Themen entspricht der in der Vorlesung bzw. Übung.

Ergänzt wurde die Sammlung durch Übungsaufgaben, welche im Laufe des Semesters gestellt worden sind bzw. werden.

Dieser Aufgabenpool kann als Grundstock für zukünftige Klausuren betrachtet werden (selbstverständlich nicht unbedingt mit den gleichen Zahlen ...)

## 1 Relle Zahlen

1. Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c > 0$. Welche der folgenden Ungleichungen sind dann für jede Wahl von $a, b, c$ auch richtig:
   (i) $bc < ac$ (ii) $(a-b)c < 0$ (iii) $a^3 + c^3 < b^3 + c^3$
   (iv) $|a+b| > |a| + |b|$ ?

   Begründen Sie Ihre Antwort oder geben Sie Gegenbeipiele an.

2. $A \subseteq \mathbb{R}$ sei die Lösungsmenge der Ungleichung $\dfrac{x-2}{x+4} \leq \dfrac{x+1}{-3+x}$ .

   Geben Sie $A$ an sowie, falls vorhanden, das Infimum, Maximum, Minimum und Supremum dieser Menge.

3. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $|x^2 + 3x - 7| = 3$ ?

4. $A \subseteq \mathbb{R}$ sei die Lösungsmenge der Ungleichung $\dfrac{(x-3)^2}{x-2} - \dfrac{4}{x-2} \leq 0$ .

   Geben Sie $A$ an sowie, falls vorhanden, das Infimum, Maximum, Minimum und Supremum dieser Menge.

5. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $\dfrac{|x-2||x+3|}{|x^2-4x+4|} \leq 1$ ?

6. Lösen Sie die folgenden Ungleichungen und Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$ und geben Sie die Lösungsmenge an.

   $$\textbf{a)}\ |x-1| < |2x-1| \qquad \textbf{b)}\ |2x+3| = \frac{x^2}{3}$$

7. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist

   $$\textbf{a)}\ \frac{|x^2-4x+4|}{|x-2| \cdot |x+3|} \leq 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \textbf{b)}\ \frac{2-x}{4+x} \leq \frac{3-x}{1+x} \quad ?$$

8. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

   **a)** $\dfrac{4+x}{2-x} \leq \dfrac{1+x}{3-x}$ **b)** $\dfrac{|x+2| \cdot |x+4|}{|x^2+4x+4|} \leq 1$ ?

9. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen von

   **a)** $\dfrac{(x-4)^2}{x-5} - \dfrac{1}{x-5} < 0,$ **b)** $|x+1| - |x| \leq |x||x+1|,$

   **c)** $\dfrac{15x^2 - 4x + 2}{3x+7} < 5x - 6$ .

10. Besitzt die Menge $M = \{x | (x-1)(x-2) < x^2 - 1\}$ ein Minimum, Maximum, Infimum, Supremum?

11. Es sei $a$ eine vorgegebene Zahl, $a \in \mathbb{R}_+$. Für welche reellen Zahlen $x$ gilt

    $|x - 3 + |x|| \leq a$ ?

    Zeichnen Sie die Lösungsmenge. Hinweis: Die Lösungsmenge hängt von $a$ ab.

12. **a)** Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c > 0$. Welche der folgenden Ungleichungen sind dann für jede Wahl von $a, b, c$ auch richtig bzw. nicht richtig:

    (i) $bc < ac$ , (ii) $(a-b)c < 0$ , (iii) $a^3 - c^3 < b^3 - c^3$ , (iv) $|ac| < |bc|$.

    **b)** Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen $x$ mit

    (i) $2|x| + 5 \leq 3$ , (ii) $\dfrac{4}{x} \leq 2$ .

13. **a)** Definieren Sie den absoluten Betrag einer reellen Zahl. Welche der folgenden Ungleichungen gelten für alle $x, y \in \mathbb{R}$, welche gelten nicht (Gegenbeispiele angeben) für alle $x, y \in \mathbb{R}$?

    (i) $-x \leq |x|$ , (ii) $|x - y| \leq |x| - |y|$ , (iii) $|x + y| > |x| + |y|$ .

    **b)** Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

    $$-1 < \frac{7x-3}{8x-5}, \quad x \neq \frac{5}{8} .$$

14. **a)** Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c > 0$. Welche der folgenden Ungleichungen sind dann für jede Wahl von $a, b, c$ auch richtig:
    (i) $bc < ac$ , (ii) $(a-b)c < 0$ , (iii) $a^2 - c^2 < b^2 - c^2$ ,
    (iv) $|bc - ac| \leq (b-a)c$ .

    **b)** Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen $x$ mit
    (i) $4|x| + 3 \leq 2$ , (ii) $|x| - x^2 \geq 0$ .

15. **a)** Definieren Sie den absoluten Betrag einer reellen Zahl.

    **b)** Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $x$ mit

    $$\frac{|x|}{x-1} \geq 1, \quad x \neq 1.$$

16. Für welche reellen Zahlen gilt

$$\frac{x+4}{x+2} > \frac{x-5}{x+4} \quad ?$$

17. Für welche reellen Zahlen $x$ gilt

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{|x-2|}{x-2} \quad ?$$

18. **a)** Welche der folgenden Regeln sind für alle $a, b \in \mathbb{R}$ richtig?

$$\begin{array}{llllll} \text{(i)} & |a+b| = |a| + |b|\,, & \text{(ii)} & |a+b| \leq |a| + |b|\,, & \text{(iii)} & |a+b| < |a| + |b|\,, \\ \text{(iv)} & |a \cdot b| = |a| \cdot |b|\,, & \text{(v)} & |a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|\,, & \text{(vi)} & |a \cdot b| < |a| \cdot |b|\,. \end{array}$$

**b)** Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit $\quad |x-1| \cdot |x+1| < \frac{1}{2}.$

19. **a)** Definieren Sie den absoluten Betrag einer reellen Zahl!

**b)** Bestimmen Sie die Menge aller $x$ mit $\quad 3(|x|-2) \geq 1 \quad$ rechnerisch.

**c)** Zeichnen Sie den Graphen von $\quad f(x) = 3(|x|-2) \quad$ und veranschaulichen Sie die Lösung von b) anhand dieses Graphen.

20. Für welche reellen Zahlen $x$ gilt $\quad |3x+3| \geq \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$ ?

21. Für welche reellen Zahlen $x$ gilt $\quad x^2 - 2x \leq |x+1| - 1$?

22. Bestimmen Sie die Lösungsmengen zu

**a)** $$-\frac{1}{2}|2x+1| \geq -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

**b)** $$\frac{2-x}{4+x} \geq \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

23. **a)** Man definiere den absoluten Betrag einer reellen Zahl $x$.

**b)** Man bestimme die Lösungsmenge von $|x^2 - 3| \geq 2|x|$.

# 2 Folgen und Reihen

1. Definieren Sie: “Die Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a$.”.
2. Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Allgemeingültigkeit und begründen Sie Ihre Entscheidung bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel an:
   (a) Jede monoton steigende Zahlenfolge ist nach unten beschränkt.
   (b) Eine nach oben beschränkte Zahlenfolge ist monoton fallend.
   (c) Eine monoton fallende Zahlenfolge ist nach oben beschränkt.
   (d) Nicht monotone Zahlenfolgen sind nach oben und unten beschränkt.
   (e) Monotone Zahlenfolgen sind nach oben und unten beschränkt.
   (f) Eine alternierende Zahlenfolge kann nicht beschränkt sein.
   (g) Eine alternierende Zahlenfolge ist immer beschränkt.
   (h) Eine Zahlenfolge kann sowohl monoton steigend als auch monoton fallend sein.
   (i) Jede beschränkte Zahlenfolge ist konvergent.
   (j) Eine konvergente Zahlenfolge ist entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend.
   (k) Wenn $(a_n)$ und $(b_n)$ divergente Zahlenfolgen sind, so muss die Folge $(a_n \cdot b_n)$ ebenfalls divergent sein.
3. Treffen Sie Aussagen zur Monotonie der Zahlenfolge $\quad (a_n) = \dfrac{n-8}{4^n}$ .
4. Berechnen Sie die Grenzwerte der Zahlenfolgen
$$(b_n) = \sqrt{\frac{6n^2+7n+3}{2n^2-4n+5}} \cdot \frac{\sqrt{27}\, n^2}{3n^2-2n+1} \quad \text{und} \quad (c_n) = \frac{(2\cdot 3^n+3)^3}{27^n} \; .$$
5. Treffen Sie Aussagen zur Monotonie der Zahlenfolge $\quad (a_n) = \dfrac{n+7}{4^n}$ .
6. Berechnen Sie die Grenzwerte der Zahlenfolgen
$$(b_n) = \sqrt{\frac{6n^2+5n+4}{3n^2-5n-4}} \cdot \frac{\sqrt{18}\, n^2}{3n^2-5n-4} \quad \text{und} \quad (c_n) = \frac{5+n}{2n-8} \cdot \frac{7-4n}{n-784} \; .$$
7. Was ist
$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} u_n\right), \quad \text{wenn} \quad u_n = \frac{2n^2-3n+5}{3+7n-6n^2} \quad \text{ist?}$$
8. Von einer Zahlenfolge $\{S_n\}$ sei bekannt:
$$S_1 = \frac{1}{10}, \quad S_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{100}, \quad \ldots, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} 10^{-i} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$
   Bestimmen Sie, falls das möglich ist, $\lim_{n\to\infty} S_n$.

9. Von einer Zahlenfolge $\{S_n\}$ sei bekannt:

$$S_1 = -\frac{1}{10}, \quad S_2 = -\frac{1}{10} + \frac{1}{100}, \quad \ldots, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i 10^{-i} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie, falls das möglich ist, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

10. **a)** Was versteht man unter einer unendlichen Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$?

**b)** Berechnen Sie die Summe der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit

$$a_n = \frac{3}{2^n} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

11. Berechnen Sie (falls möglich)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\sqrt{n^2 - 2n + 1}}{1 + n}.$$

12. Berechnen Sie die Summe der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit

$$a_n = \frac{1}{2^n} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

13. Welche der Folgen sind monoton?
Welche Grenzwerte besitzen sie?
Vom wievielten Folgeglied an unterscheiden sich Folgeglieder und Grenzwert um weniger als $\frac{1}{1000}$?

**a)** $a_n = \dfrac{4n - 6}{3n - 2}$ **b)** $b_n = \dfrac{7n + 2}{4n - 1}$

14. Gegeben seien die Zahlenfolgen

$$a_n = \frac{4n + 3}{5n + 2} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{5n + 3}{4n^2 + 2}.$$

Berechnen Sie (falls möglich) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ , $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ , $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$.

15. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2 - n}}{n + 1} .$$

## 2.1 Finanzmathematik

1. Gesucht ist eine Geldanlage, die das eingesetzte Kapital innerhalb von 12 Jahren verdoppelt. Welchen Zinssatz muss eine Bank mindestens bieten, um dieses Ziel zu erreichen?

2. Wie lange muss ein Betrag zu 4,5% p.a. angelegt werden, damit sich das eingesetzte Kapital verdoppelt. (Die Zinsgutschrift erfolgt jeweils am Jahresende und die Zinsen verbleiben auf dem Konto.)

3. Jemand möchte nach 10 Jahren 80.000 Euro zur Verfügung haben. Welchen Betrag muss er einzahlen, wenn das Guthaben mit 3,5 % p.a. verzinst wird, die Zinsgutschrift jeweils am Jahresende erfolgt und die Zinsen auf dem Konto verbleiben?

4. Ein Kapital von 100.000 Euro wird für 10 Jahre angelegt und jährlich mit $6\%$ einschließlich Zinseszins verzinst.

   (a) Berechnen Sie den Kontostand nach 10 Jahren bei jährlicher Verzinsung (inkl. Zinseszins).

   (b) Die Verzinsung und Gtuschrift der Zinsen erfolgt vierteljährlich mit jeweils $1,5\%$ und Zinseszins. Wie lautet jetzt der Kontostand nach 10 Jahren?

5. Ein Anleger kauft ein Wertpapierpaket im Wert von 25.000 € und verkauft dies nach dreieinhalb Jahren für 37.852,37 €. Welcher durchschnittlichen jährlichen Verzinsung entspricht dies?

6. Ein Vater zahlt zur Geburt seines Kindes 5 € auf ein neueröffnetes Konto und nimmt sich vor, diesen Betrag zu jedem Geburtstag zu verdoppeln.

   (a) Wie hoch ist die insgesamt eingezahlte Summe (ohne Berücksichtigung von Zinsen) am 7. Geburtstag?

   (b) Wie groß ist der Betrag, der zum 18. Geburtstag eingezahlt werden müsste?

# 3 Funktionen

1. Die Funktion $f(x) = \dfrac{(4-x)^2 e^x}{e^3}$ werde auf $-3 \leq x \leq 5$ betrachtet.

   **a)** Bestimmen Sie alle relativen (lokalen) und absoluten (globalen) Extremwerte der Funktion.

   **b)** Bestimmen Sie die Nullstellen von $f(x)$.

   **c)** Skizzieren Sie den Funktionsverlauf im angegebenen Intervall.

2. Definieren Sie: "Die Funktion $f$ besitzt in $x_0$ ein relatives Maximum".
   Hinweis: $f$ braucht nicht differenzierbar zu sein.

3. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 8x + 5}{3x^3 - 3x}$ an den Stellen

   **a)** $x_0 = 0$ , **b)** $x_1 = 1$ , **c)** $\infty$

   hinsichtlich ihres Verhaltens (Grenzwertbetrachtung).

4. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

   **a)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3+2n}{5n-1} \cdot \frac{10n-7}{4n+4}$, **b)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{6^x + 3^{x+1}}{6^{x+1}}$, **c)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + \sqrt{3}x - 1}{4x+2}$.

5. Gegeben sei die Funktion $f : [-3, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

   $$f(x) = 1 - \frac{2x+2}{2 + x^2 + 2x} \; .$$

   **a)** Bestimmen Sie alle Maxima und Minima dieser Funktion. Unterscheiden Sie dabei zwischen relativen und absoluten Extremwerten.

   **b)** Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

   **c)** Erstellen Sie eine Skizze der Funktion.

6. Berechnen Sie den Grenzwert (falls dieser existiert):

   $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}.$$

7. $A \subseteq \mathbb{R}$ sei der Definitionsbereich von

   $$f(x) = \frac{\ln(x+4)}{\sqrt{25 - x^2} - 4}.$$

   Geben Sie $A$ an sowie, falls vorhanden, das Infimum, Maximum, Minimum und Supremum dieser Menge.

   Bestimmen Sie die Nullstellen von $f(x)$.

8. Die Funktion $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$ werde für $0 \leq x \leq 2$ betrachtet.

   Wo liegen relative (lokale) und globale (absolute) Extrema?

   Wo ist $f$ auf [0,2] konvex bzw. konkav?

9. Berechnen Sie den Grenzwert (falls dieser existiert):

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{(2+x)^2-4}{x}} .$$

10. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = 2\sin x \cos x + e^{3x}$ auf $\{x|x \geq 0\}$ konvex ist.

11. $M \subseteq \mathbb{R}$ sei der Definitionsbereich von

$$f(x) = \frac{\sqrt{81-x^2}}{1+\ln x} .$$

Geben Sie $M$ and und (falls vorhanden) das Infimum, Maximum, Minimum, Supremum dieser Menge $M$.

Bestimmen Sie die Nullstellen von $f$.

12. Bestimmen Sie die Ableitung von

$$f(x) = \sqrt[4]{1+\cos^2 x}.$$

13. Betrachtet werde die Funktion $f$ mit $f(x) = \left(\frac{3x-6}{(5-2x)^2}\right)^2$ auf dem Intervall $[0,4]$.

**a)** Bestimmen Sie Definitionsbereich und Wertebereich.

**b)** Bestimmen Sie Nullstellen und Extremwerte (Unterscheidung: lokal, global).

**c)** Skizzieren Sie die Funktion im angegebenen Intervall.

14. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x+x^2}{3x^2+2} .$$

15. Mit Hilfe der Differentialrechnung bestimme man die Teilmengen von $\mathbb{R}$, auf denen die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$$

**a)** monoton wachsend, **b)** konvex ist.

16. Geben Sie den Definitions- und Wertebereich von

$$f(x) = \left(\frac{x^3-2x-1}{x^2+1}\right)^5$$

an. Wo ist die Funktion stetig?

17. Bilden Sie zu der Funktion

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

zu den Punkten, bei denen $f$ differenzierbar ist, die 1. Ableitung $f'(x)$. Vereinfachen Sie den Ausdruck für $f'(x)$, soweit Ihnen das möglich ist.

18. Berechnen Sie
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - |x^2 - 1|}{x^2}\ .$$

19. Untersuchen Sie die Funktion
$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 - 2x}$$
an den Stellen
1) $x_0 = 0$, 2) $x_1 = 1$, 3) $+\infty$
hinsichtlich ihres Verhaltens (Grenzwertbetrachtung). Begründen Sie die Resultate.

20. $f$ sei auf $[a, b]$ definiert.

**a)** Definieren Sie: "Die Funktion $f$ besitzt in $x_0$ ein absolutes Maximum im Intervall $[a, b]$".

**b)** Bestimmen Sie alle relativen Extrema und alle Wendepunkte der Funktion
$$f(x) = \frac{5x}{x^2+1}.$$
Skizzieren Sie den Graphen von $f$ auf [–10,10].

**c)** Bestimmen Sie ferner das absolute Minimum bzw. Maximum dieser Funktion auf dem Intervall $\left[\frac{1}{5}, 5\right]$.

21. **a)** Bestimmen Sie für $f(x) = 3(x^2 + 1)^{-1}$ die lokalen Extremstellen und Wendepunkte auf ganz $\mathbb{R}$.

**b)** Bestimmen Sie für das Intervall [–2,3] das globale Maximum bzw. Minimum.

(Hinweis: Vermeiden Sie beim Differenzieren die Quotientenregel.)

22. $f$ sei definiert durch $f(x) = (x + 2)|x - 2|$.

**a)** Welches ist der maximale Definitionsbereich $D$ von $f$?

**b)** Untersuchen Sie, ob $f$ auf $D$ injektiv ist.

**c)** Ist $f$ in $x_0 = 2$ stetig?

23. Man untersuche die Funktion
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x}$$
an den Stellen
**a)** $x_0 = 0$, **b)** $x_1 = -1$, **c)** $-\infty$
hinsichtlich ihres Verhaltens (Grenzwertberechnung).

24. Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung von
$$f(x) = x^2 e^{x^3}.$$

25. Bestimmen Sie alle relativen Extrema der Funktion

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

und bestimmen Sie ferner das absolute Minimum bzw. Maximum dieser Funktion auf dem Intervall $\left[\frac{1}{4}, 2\right]$.

26. Bestimmen Sie alle relativen Extrema der Funktion

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

und das absolute Minimum und Maximum dieser Funktion auf dem Intervall $\left[\frac{3}{10}, \frac{8}{10}\right]$.

Skizzieren Sie diese Funktion auf dem angegebenen Intervall.

27. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f(x) = x + \sin x \quad \text{für } 0 \leq x$$

auf ihrem Definitionsbereich monoton wachsend ist.

Geben Sie das absolute Minimum, das absolute Maximum und eventuell relative Extrema von $f$ auf $[0, 2\pi]$ an.

28. Auf dem Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ definiere man

$$f(x) = \sin x + \cos x.$$

Wo ist $f$ monoton wachsend, wo ist $f$ monoton fallend?

Zeigen Sie, dass $f$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ konkav ist.

29. Berechnen Sie bzw. beweisen Sie die Nichtexistenz für

$$\textbf{a)} \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 - 2n + 1} \qquad \textbf{b)} \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 6x + 3}{4x - 4}.$$

30. **a)** Definieren Sie den Begriff "$f$ besitzt in $x_0$ ein relatives Minimum" und geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, dass ein solches vorliegt.

**b)** Bestimmen Sie alle relativen Extrema der Funktion $f(x) = e^{x^4-4x^2}$ und bestimmen Sie ferner das absolute Maximum dieser Funktion für die Intervalle [0,1], [0,2] und [0,3].

31. Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{2x - 1}{(1 - x)^2}$$

hinsichtlich

1) relativer Extrema

2) Wendepunkte

3) Verhalten im Unendlichen

4) absoluter Minima auf $[-\infty, 0]$.

32. Man gebe den Definitionsbereich der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$$

an und bestimme die Extremstellen von $f$ und, falls solche existieren, die Art der Extrema!

33. Ist die Funktion $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ differenzierbar?

34. Was können Sie über Konvexität oder Konkavität der Funktion

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

aussagen (und beweisen)?

35. Berechnen Sie bzw. beweisen Sie die Nichtexistenz für

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+n+n^2}{1+n-n^2}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x); \quad f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{für } x < 0 \\ x-2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$ ,

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{3x-3}$.

36. Berechnen Sie die 1. Ableitung von

a) $f_1(x) = \exp\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

b) $f_2(x) = 3^{\sqrt{x}}$

sowie (Punkt-) Elastizität und Wachstumsrate von

c) $f_3(x) = \dfrac{x}{x-1}$

d) In welchen Punkten hat $f_3$ die Elastizität 0 bzw. 1? Wie sind Elastizität und Wachstumsrate in $x_0$ allgemein definiert?

37. a) Wie sind die Begriffe globales (= absolutes) bzw. lokales (= relatives) Maximum für eine Funktion $f$ auf einem Intervall $[a, b]$ definiert?

Wie berechnet man üblicherweise beides für eine auf $[a, b]$ differenzierbare Funktion?

b) Man berechne mögliche Extremstellen von

$$g(x) = e^{x^3 - 3x}$$

auf $\mathbb{R}$ und entscheide auf Maximum bzw. Minimum. Welches ist das absolute Maximum bzw. Minimum von $g$ auf $[-1, 3]$?

38. Man untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x}$$

an den Stellen
**a)** $x_0 = 0$ , **b)** $x_1 = 2$ , **c)** $\infty$
hinsichtlich ihres Verhaltens (Grenzwertberechnung).

39. Man berechne die ersten Ableitungen von

**a)** $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$,

**b)** $f(x) = \sqrt[5]{x^7}$,

**c)** $f(x) = \ln(\sqrt{x + \sqrt{x}})$.

40. Man bestimme den Definitionsbereich und sämtlich relativen Extrema der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 12}{x - 2}.$$

Wo liegt das absolute Maximum von $f$ im Intervall $[4, 10]$?

41. Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extremwerte der Funktion

$$f(x) = 4x^2 - 40x + 80$$

auf dem Intervall $[0; 8]$

42. Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion

$$f(x) = be^{-(x-a)^2} \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}\,, \quad b \neq 0.$$

## 3.1 Anwendungen der Differentialrechnung in der Ökonomie

1. Berechnen Sie die Punktelastizität für die Funktion $f(x) = (x+2)^2 e^{-x}$.
   Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist diese kleiner als $0$?

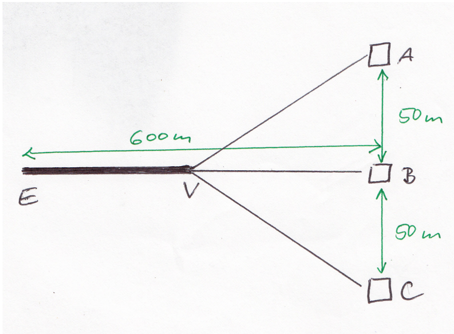
2. Gegeben Sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$; $x \neq \pm 1$.

   **a)** Bestimmen Sie alle relativen (lokalen) und globalen (absoluten) Extremwerte der Funktion, falls solche existieren.

   **b)** Berechnen Sie die Punktelastizität der Funktion an den Stellen $x = 0$ und $x = 2$.

   **c)** Für welche $x \in \mathbb{R}$ hat die Elastizität den Wert $1$?

3. Eine Wasserleitung soll von einer Einspeisungsstelle E zu 3 Häuern A, B, C, die je 50 m voneinander entfernt sind, verlegt werden (siehe Skizze). An welcher Stelle V (in welchem Abstand von E) hat die Verzweigung zu erfolgen, damit die Kosten möglichst gering sind, wenn jede der drei Einzelleitungen pro Meter nur $\frac{2}{5}$ der Hauptleitung kostet und die Strecke von E nach B 600 m lang ist?




4. Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös $E$ und Kosten $K$. Wenn der Erlös das Produkt aus Preis und Absatz ($E = px$) ist, so gilt $G(x) = px - K(x)$. Bei gegebenem konstanten Preis $p = 39$ und der Kostenfunktion
$$K(x) = 84,5 + 22,5x - 4,5x^2 + 0,5x^3 \quad \text{im Intervall} \quad 0 \leq x \leq 11$$
ist das Maximum von $G$ gesucht. $x$ bezeichne den Absatz (in ME).

5. **a)** Wie ist die Punktelastizität definiert?
   **b)** Berechnen Sie die Punktelastizität $\varepsilon_f(x)$ von $f$, $f$ sei definiert durch
$$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x^2}}.$$
   Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\varepsilon_f(x) > 0$?

6. Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ die Elastizität $\varepsilon_f(x)$ von
$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3}.$$
   Für welche $x$ ist $\varepsilon_f(x)$ nicht definiert? Wie groß sind $\varepsilon_f(4)$, $\varepsilon_f(16)$?

7. **a)** Wie sind die Begriffe Punktelastizität bzw. Bogenelastizität definiert?
   **b)** Berechnen Sie die Punktelastizität $\varepsilon_f(x)$ von $f$, $f$ sei definiert durch
$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$
   für $x > 0$. Für welche (positiven) $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\varepsilon_f(x) < 1$?

8. Berechnen Sie die Punktelastizität $\varepsilon_f(x)$ von $f$, $f$ definiert durch
$$f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad x \neq 1.$$
   Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt $\varepsilon_f(x) > 1$?

9. Berechnen Sie die Elastizität von $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ für $x > 0$. In welchen Bereichen (für $x > 0$) wird die Elastizität von $f$ negativ?

10. Berechnen Sie die Elastizität von

    $$g(x) = e^{x^3-3x}$$

    in beliebigen Punkten $x$. In welchen Bereichen (für $x > 0$) wird die Elastizität negativ?

11. Eine zylindrische Dose mit Inhalt $V = 1\ l$ soll minimale Oberfläche besitzen.

    Wie ist die Dose zu fertigen?

12. Ein Unternehmen bietet Schüttgut zu folgenden Preise je Tonne an:

    $$K(x) = \begin{cases} 20 + 10x + \frac{810}{x} & \text{bei Abnahme von } 0 < x < 10 \text{ Tonnen} \\ 15 + 10x + \frac{800}{x} & \text{bei Abnahme von } x \geq 10 \text{ Tonnen} \end{cases}.$$

    Wo liegt das Kostenminimum für den Preis je Tonne?

13. Man berechne die Elastizität von $f(x) = x^4 - 1$ in $x_0$ und alle Punkte, in denen $f$ unelastisch ist.

14. Ein Monopolist hat für ein bestimmtes Produkt eine Preis-Absatz-Funktion

    $$p(x) = 0,01(100 - x)^2$$

    und die Kostenfunktion für dieses Produkt ist

    $$K(x) = 0,01x^3 - x^2 + 40x + 300,$$

    dabei sei x die verkaufte Stückzahl seiner Produkte in ME.

    (a) Berechnen Sie den Höchstpreis und die Sättigungsmenge.
    (b) Geben sie die Erlösfunktion an und berechnen sie deren Maximum.
    (c) In welchem Bereich (bezogen auf die Stückzahlen) erzielt die Firma Gewinn?
    (d) Für welche Menge wird der Gewinn maximal (Cournot-Punkt)?

15. Ein Bauer erntet 7,3 Tonnen Gerste je Hektar. Der Verkaufspreis von erntefrischem Getreide liegt bei 0,12 € je kg. Würde man das Getreide trocknen, so verliert es über einen gewissen Zeitraum je Tag 7g Gewicht (je kg), dafür steigt der Preis mit jedem Tag nachgewiesener Trocknungszeit um 1,00 €/Tonne. Nach wieviel Tagen Trocknung würde man die höchsten Einnahmen erzielen? (Trocknung erfolgt mit Windenergie, die sonst nicht benötigt wird, deshalb keine zusätzlichen Kosten).

# 4 Integralrechnung

1. Bestimmen Sie alle Werte $a \in \mathbb{R}$, für die gilt

$$\int_a^2 (3x^2 + 2x)\mathrm{d}x = 12 \;.$$

2. Berechnen Sie:

$$\textbf{a)} \int \frac{1}{7\sqrt[5]{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{b)} \int_0^{\ln 4} e^x\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{c)} \int_{-\infty}^{0} e^{3x}\,\mathrm{d}x$$

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\textbf{a)} \int_0^1 6\sqrt[3]{x} - 5x^4\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{b)} \int_e^1 \ln x\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{c)} \int (3x^2+8)\cdot\sqrt{x^3+8x-3}\,\mathrm{d}x$$

4. Berechnen Sie:

$$\textbf{a)} \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{b)} \int_0^{\ln 5} e^x\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{c)} \int_0^{\infty} e^{-5x}\,\mathrm{d}x$$

$$\textbf{d)} \int (2x^2 - 7)\ln x\,\mathrm{d}x$$

5. Berechnen Sie:

$$\textbf{a)} \int \frac{1}{3x^7}\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{b)} \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 + 1)\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{c)} \int_0^1 \frac{3+x}{x^4}\,\mathrm{d}x$$

$$\textbf{d)} \int (3x+1)e^x\,\mathrm{d}x$$

6. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\textbf{a)} \int x^4 + \frac{1}{x^4} + 4^x + \sqrt[4]{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{b)} \int_0^{\pi} \sin x\,(3cos^2 x - \cos x + 4)\,\mathrm{d}x,$$

$$\textbf{c)} \int e^{\frac{x}{2}} \sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$

7. Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \left(\frac{3}{x} - 8e^{-4x}\right)\mathrm{d}x.$$

8. Berechnen Sie das unbestimmte Integral

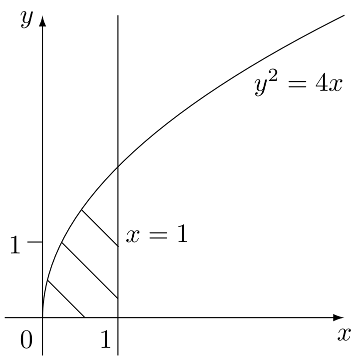
$$\int \left(\frac{5}{x} - \sin 2x\right)\mathrm{d}x.$$

9. **a)** Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von der Kurve $f(x) = x+x^2$, dem Intervall $I = [0,5]$ auf der $x$–Achse und den Loten in den Randpunkten $(0, f(0))$, $(5, f(5))$ begrenzt wird.
**b)** Welchen Wert erhalten Sie, wenn $I$ durch das Intervall $[-2,2]$ ersetzt wird?

10. **a)** Was ist eine Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion $f$?
Was ist das unbestimmte Integral $\int f(x)\mathrm{d}x$ ?
**b)** Berechnen Sie eine Stammfunktion zu

$$i)\ \ f_1(x) = x^3 + 2x \qquad ii)\ \ f_2(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$$

11. Wie groß ist das Flächenstück, das sich ergibt, wenn man in die Parabel $y^2 = 4x$ eine Sehne durch $x = 1$ parallel zur $y$–Achse einzeichnet?




12. Berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x.$$

13. Man berechne das unbestimmte Integral $\int \left(6\sin x + 3.5 - 3x^2 + \frac{1}{x}\right)\ \mathrm{d}x$
und das bestimmte Integral $\int_0^1 (4x-7)^2\ \mathrm{d}x$ .

14. **a)** Bestimmen Sie das unbestimmte Integral $\int te^t\ \mathrm{d}t$.
**b)** Was ist $\int_0^1 te^t\ \mathrm{d}t$?

15. Es sei

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 2 - x & \text{für } \frac{\pi}{2} < x \leq 2 \end{cases} .$$

Berechnen Sie $\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x$.

# 5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Lösen sie die folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme:
   **a)** $y'(x) + 2y(x) + x = 1$
   **b)** $3y'' + 18y' = 6 - 27y\ ;\quad y(0) = \frac{20}{9}\ ;\quad y'(0) = -5\ .$
   Führen Sie eine Probe für Aufgabe a) durch!

2. Lösen sie das Anfangswertproblem $y'(x) - x = 3y(x) + 1\ ;\ y(0) = \frac{23}{9}.$
   Führen Sie eine Probe durch!

3. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme

   $\mathbf{a})\ y' + (2x-4)y(x) - e^{-x^2} = 0$

   $\mathbf{b})\ y'' - 4y' = 5;\ y(0) = 0,\ y'(0) = -\frac{11}{4}$

   $\mathbf{c})\ y''(x) = \cos x$

4. Lösen sie die folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme:
   **a)** $y'(x) = e^{x-y(x)}$ **b)** $y'' - 4y' + 3 = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = -\frac{29}{4}$

5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

   $$x'''(t) - 4x''(t) + x'(t) + 6x(t) = 0$$

6. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme:
   **a)** $y'(x) = 3x^2y(x) - 4xe^{x^3}, \quad y(1) = e$
   **b)** $y''(x) + y'(x) = 12y(x) + x$
   **c)** $y''(x) + 6y'(x) = 9 - 9y(x)$

7. Welche Funktionen $P$ sind Lösungen der Differentialgleichung

   $$P'(x) = -aP(x)b,$$

   wobei $a > 0$, $b > 0$ gegebene reelle Zahlen sind? Welche Funktion $P(x)$ erfüllt die Anfangsbedingung $P(0) = 1$?

8. Welche Funktionen $y$ sind Lösungen der Differentialgleichung

   $$y''(x) + ay(x) + b = 0,$$

   wobei $a > 0$, $b > 0$ gegebene reelle Zahlen sind? Welche Funktion $y(x)$ erfüllt die Anfangsbedingung $y(0) = a$?

9. Die (gewöhnliche inhomogene) Differentialgleichung

   $$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = -9x^3 + 12x^2 + 2x - 2$$

   besitzt die spezielle Lösung $\tilde{y}(x) = x^3 - x^2$. Geben Sie die allgemeine Lösung an und bestätigen Sie durch Differenzieren, dass Sie wirklich die Lösung gefunden haben.

10. Berechnen Sie die allgemeine Lösung von

$$y' = \cos(t) \cdot y + e^{\sin(t)}.$$

11. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' + 10y' + 10 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 9.$$

12. **a)** Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' - 2xy = 0$, $y(0) = 2$.

    **b)** Führen Sie eine Probe durch.

13. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

14. Berechnen Sie die allgemeine Lösung von

$$y' = \frac{1}{t-1}y + t^2 - 1 \quad \text{für} \quad t > 1$$

    und führen Sie eine Probe durch.

15. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' + y' - 12y + 12 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -7.$$

16. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{-4}{t+2}\, y + \frac{1}{(t+2)^3}, \quad t > -2, \quad y(0) = 1.$$

17. Berechnen Sie die allgemeine Lösung von

$$y'' - 10y' + 25y - 5 = 0.$$

    Führen Sie eine Probe durch.

18. Die gewöhnliche inhomogene Differentialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 2 + 4x - 3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

    hat die spezielle Lösung $y(x) = x^2$. Geben Sie die allgemeine Lösung an und bestätigen Sie durch Differenzieren, daß Sie die Lösung gefunden haben.

19. **a)** Berechnen Sie die allgemeine Lösung von $y' = \frac{3}{t}(y-1)$ für $t > 0$ und skizzieren Sie die Lösungsschar.

    **b)** Führen sie eine Probe durch.

20. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'' - y' - 6y + 12 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 12$.

21. Berechnen Sie für $t > 0$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = -\frac{1}{t}y + t^2 - t, \quad y(1) = -\frac{1}{12}.$$

22. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$y'' - 6y' + 12 = 0.$$

23. Für welche Funktionen $y(x)$ gilt
**a)** $y'(x) = 1 + x^2$ ,
**b)** $y'(x) - y(x) = 0$ ?

24. Man löse die Differentialgleichung $y'(t) - \frac{1}{t}\,y(t) = 0, \quad y(1) = 1.$

25. a) Man berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{1}{t}y + t^2 - t \quad \text{für} \quad t > 0\ .$$

b) Man löse das Anfangswertproblem

$$y'' + 2y' + y - 2 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

26. Man löse das Anfangswertproblem $y' = -ty, \quad y(0) = 1$ und skizziere die Lösungskurve.

27. Man berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' + y' - 2y + 4 = 0$ und führe eine Probe durch.