Prof. Dr. B. Kugelmann
Florian Perner
Institut für Mathematik und Informatik
Universität Greifswald

WS 19/20

Nichtlineare Optimierung

Übung 2

1. Gegeben sei die Menge $\mathcal{X} := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x_1^2 \leqslant x_2\} \subset \mathbb{R}^2$ mit $x^* = (1, 1)$. Bestimmen Sie den Tangentialkegel $\mathcal{T}(\mathcal{X}, x^*)$ im Punkt x^*.

2. a) Zeigen Sie: Für eine stetig differenzierbare Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R},\ X$ konvex, gilt:

$$f \text{ ist konvex} \iff \forall x, y \in X : f(x) \geqslant f(y) + \nabla f(y)(x - y)$$

   b) Betrachte die quadratische Funktion

$$f(x) := \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + \gamma$$

   mit $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, $c \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma \in \mathbb{R}$.

   Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} f \text{ ist konvex } &\iff Q \text{ ist positiv semi-definit und} \\ f \text{ ist streng konvex } &\iff Q \text{ ist positiv definit.} \end{aligned}$$

3. Zum Lemma von Farkas:
   a) (Wiederholung) In welchem Zusammenhang steht das Skalarprodukt zweier Vektoren u, v mit dem Winkel $\sphericalangle(u, v)$ zwischen den beiden Vektoren?
   b) Sei $A = (1, -2)$. Skizzieren Sie die Menge $M := \{d \in \mathbb{R}^2 : Ad \leqslant 0\}$.
   c) Für welche $b \in \mathbb{R}^2$ gilt die Aussage 2.15(b), d.h. für alle $d \in M$ soll $b^T d \leqslant 0$ gelten. Vergleichen Sie mit Aussage 2.15(a) des Lemmas.
   d) Wie ist die Situation für $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$?