

Optimierung I (Online-Übung)

Übung 6

1. a) Welche der Vektoren sind lexikopositiv?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- b) Welche der folgenden Vektoren sind lexikographisch größer?

$$\text{i) } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- c) Ordne die folgenden Vektoren lexikographisch aufsteigend:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

- d) Zeige, dass die Relation „ \succ “ auf dem Vektorraum \mathbb{R}^n transitiv ist, d.h.

$$u \succ v \wedge v \succ w \Rightarrow u \succ w.$$

2. Löse das folgende LOP mit dem lexikographischen Simplex-Verfahren!

$$\begin{aligned} \max \quad & 3/4x_1 - 20x_2 + 1/2x_3 - 6x_4 \\ \text{NB:} \quad & 1/4x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0 \\ & 1/2x_1 - 12x_2 - 1/2x_3 + 3x_4 \leq 0 \\ & x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

3. a) Die Relation “ \prec ” auf \mathbb{C} ist definiert durch:

$$z_1 \prec z_2 :\Leftrightarrow |z_1| < |z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Zeige oder widerlege:

- i. Transitivität: $z_1 \prec z_2, z_2 \prec z_3 \Rightarrow z_1 \prec z_3, \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
- ii. Trichotomie: $z_1 \prec z_2$ oder $z_2 \prec z_1$ oder $z_1 = z_2, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

4. Das Klee-Minty-Problem ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n 10^{n-j} x_j \\ \text{NB: } & 2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j + x_i \leq 100^{i-1} \quad 1 \leq i \leq n \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Der Zulässigkeitsbereich besitzt 2^n Ecken.

- a) Löse das Problem für $n = 3$ und dem Nichtbasisgradientenverfahren.
Wie viele Ecken werden besucht?
- b) Wie viele Ecken werden bei Methode 7.1 ii) bzw. iii) besucht?

Hausaufgaben

1. Beweise den Rest von Satz 6.2 aus der Vorlesung:

Die Relation „ \succ “ auf dem Vektorraum \mathbb{R}^n

- ist verträglich mit der Addition:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : u \succ w \Rightarrow u + v \succ w + v,$$

- ist verträglich mit der positiven Skalarmultiplikation:

$$\forall \lambda > 0 : u \succ v \Rightarrow \lambda u \succ \lambda v$$

- und es gilt genau einer der drei Fälle:

$$u \succ v \text{ oder } v \succ u \text{ oder } u = v.$$

2. Die Relation „ \succ “ kann auf \mathbb{C} definiert werden durch

$$a_1 + ib_1 \succ a_2 + ib_2 :\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \succ \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Ist sie verträglich mit der lexikopositiven Skalarmultiplikation, d.h. gilt

$$\forall z_3 \in \mathbb{C}, z_3 \succ 0 : z_1 \succ z_2 \Rightarrow z_1 z_3 \succ z_2 z_3?$$

3. Löse das folgende LOP mit dem lexikographischen Simplex-Verfahren!

$$\begin{aligned} \max & 10x_1 - 57x_2 - 2x_3 - 24x_4 \\ \text{NB: } & x_1 + 11x_2 - 5x_3 - 18x_4 \leq 0 \\ & x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 0 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Abgabetermin: 01.06.2020 per Mail oder Briefkasten (florian.perner@uni-greifswald.de)