Prof. Dr. B. Kugelmann
Florian Perner
Institut für Mathematik und Informatik
Universität Greifswald

WS 19/20

Nichtlineare Optimierung

Übung 6

1. Eine stetig differenzierbare Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig konvex, wenn ein $\mu > 0$ existiert, sodass für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) + \mu\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

   Zeigen Sie, dass folgende Aussage gilt:

   f ist gleichmäßig konvex $\Longleftrightarrow \exists \mu > 0\ \forall x, y \in X : f(x) \geqslant f(y) + \nabla f(y)(x-y) + \mu\|x-y\|^2.$

   (vgl. Vorlesung 3.1.8 Beweis des Satzes)

2. Gegeben sei das Beispiel 3.1.4 aus der Vorlesung, d.h. sei $f(x) = x^2$ mit einem Startwert $x^{(0)} = 1$ und einer Abstiegsrichtung $d^{(k)} = -1,\ k \in \mathbb{N}$.
   a) Zeigen Sie mittels Definition 3.1.6, dass die Schrittweite $t_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}$ nicht effizient ist.
   b) Für welche $\theta > 0$ ist die Schrittweite $t_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ effizient?

3. Man betrachte die quadratische Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{2}x^TAx + b^Tx + c$ mit $A = A^T$ positiv definit.
   a) Lösen Sie für feste $x \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}^n$ und $\delta \in (0,1)$ die Gleichung (in τ)

$$f(x + \tau d) = f(x) + \delta \nabla f(x) d\tau.$$

   (vgl. Vorlesung 3.2.3 ii)
   b) Für welches L erfüllt f die Lipschitz-Bedingung

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leqslant L\|x-y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n?$$

   c) Zeigen Sie unter der Voraussetzung $(x^TA + b^T)d < 0$, dass

$$\tau \geqslant -\frac{2(1-\delta)}{L}\frac{\nabla f(x)d}{\|d\|^2}$$

   gilt. (vgl. Vorlesung 3.2.3 iii)