Prof. Dr. B. Kugelmann
Perner/Preuß
Institut für Mathematik und Informatik
E.-M.-Arndt-Universität Greifswald

WS 17/18

Numerik Grundpraktikum

Übung 5

Aufgaben

1) Auf das Anfangswertproblem

$$y'(x) = y, \quad y(0) = 1$$

werde ein beliebiges explizites s-stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweite h angewendet.

   a) Zeige, dass die in einem RK-Schritt berechneten Stufen k_i Polynome in h vom Grad $\leq i-1$ sind!

   b) Zeige, dass das Verfahren höchstens Konsistenzordnung s besitzt!

2) Schreibe ein Programm `bogshamp(a,b,h,y0,f,tol)`, das eine Näherungslösung für das AWP

$$y'(x) = f(x,y(x)), \quad y(a) = y_0, \quad x \in [a,b], \quad y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

an der Stelle $x = b$ auf Basis des Bogacki-Shampine-Vefahrens mit Anfangsschrittweite h berechnet! Dies ist ein eingebettetes RK-Vefahren (Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren), das durch die Koeffizienten

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & \\
3/4 & 0 & 3/4 & & \\
1 & 2/9 & 1/3 & 4/9 & \\
\hline
 & 2/9 & 1/3 & 4/9 & 0 \\
 & 7/24 & 1/4 & 1/3 & 1/8
\end{array}$$

gegeben ist. Die neue Schrittweite berechne sich jeweils aus

$$h_{\text{neu}} = 0.9 \cdot h \cdot \sqrt{\frac{\texttt{tol}}{|\eta_{i+1} - \hat{\eta}_{i+1}|}}.$$

Teste das Programm an dem Beispiel

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ \frac{y_1(x)y_2(x)^2}{1+y_1(x)^2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(-2) \\ y_2(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh(-2) \\ \cosh(-2) \end{pmatrix}, \quad t \in [-2,2]$$

mit Anfangsschrittweite $h = 0.1$ und Toleranz $tol = 10^{-8}$!

a) Wie viele Funktionsauswertungen und Integrationsschritte werden benötigt? Wie oft wird eine Schrittweite zurückgewiesen? Wie groß ist der Fehler bei $x = 2$ im Vergleich zur exakten Lösung $y(x) = (\sinh(x), \cosh(x))^T$?

b) In der Matlab-Funktion `ode23` ist dasselbe Verfahren (mit ähnlicher Schrittweitensteuerung) implementiert. Mache dich mit diesem Solver vertraut und vergleiche die Werte aus a) mit den Werten von `ode23`!

c) Was stellt man bei der Berechnung von k_4 fest? Wie lässt sich diese Eigenschaft ausnutzen?

Programmierhausaufgabe

2) Die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= \xi + 2\dot{\eta} - \mu_2 \frac{\xi + \mu_1}{N_1} - \mu_1 \frac{\xi - \mu_2}{N_2} \\ \ddot{\eta} &= \eta - 2\dot{\xi} - \mu_2 \frac{\eta}{N_1} - \mu_1 \frac{\eta}{N_2} \end{aligned} \tag{1}$$

beschreiben die Bewegungen eines Satelliten in den Koordinaten (ξ,η) des mitrotierenden Schwerpunktsystems. Dabei seien

$$N_1 = ((\xi + \mu_1)^2 + \eta^2)^{3/2} \qquad N_2 = ((\xi - \mu_2)^2 + \eta^2)^{3/2}$$
$$\mu_1 = 0.012277471 \qquad \mu_2 = 1 - \mu_1.$$

Mit den Anfangswerten

$$\xi(0) = 0.994 \qquad \dot{\xi}(0) = 0 \qquad \eta(0) = 0 \qquad \dot{\eta}(0) = -2.001585106$$

ergibt sich ein kleeblattförmiger periodischer Orbit (*Arenstorf Orbit*) mit der Periodendauer $T = 17.0652166$.

a) Schreibe (1) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung mit den Variablen $y_1 := \xi$, $y_2 := \dot{\xi}$, $y_3 := \eta$ und $y_4 := \dot{\eta}$!

b) Schreibe ein Programm `rkf45(a,b,h,y0,f,tol)`, das eine Näherungslösung für das AWP

$$y'(x) = f(x,y(x)), \quad y(a) = y_0, \quad x \in [a,b], \quad y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

auf Basis des Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahrens 4.(5.) Ordnung mit Anfangsschrittweite h berechnet! Die Koeffizienten findest du auf der Veranstaltungsseite. Löse damit die Aufgabe für eine Periode mit $tol = 10^{-5}$ und einer beliebigen Anfangsschrittweite!

c) Wie viele Funktionsauswertungen und Integrationsschritte werden benötigt? Wie oft wird eine Schrittweite zurückgewiesen? Wie groß ist der Fehler zwischen Start- und Endpunkt? In welchen Bereichen werden große bzw. kleine Schrittweiten verwendet?

d) In der Matlab-Funktion `ode45` ist ein ähnliches Verfahren derselben Ordnung implementiert. Mache dich mit diesem Solver vertraut und vergleiche die Werte aus `rkf45` (d.h. Funktionsauswertungen, Integrationsschritte, Zurückweisungen von Schrittweiten, Fehler zwischen Start- und Endpunkt) mit den Werten von `ode45`! Führe dieselben Vergleiche mit dem Solver `ode23` durch! Welchen der drei Löser würdest du für diese Aufgabe empfehlen?

Hinweis: Wer zur Kontrolle den Arenstorf-Orbit betrachten möchte, der plotte η *über* ξ.

Lösungen an `markus.stoeber95@web.de`
Abgabetermin: 24.11.2017, 10:00 Uhr