Prof. Dr. B. Kugelmann
Perner/Preuß
Institut für Mathematik und Informatik
E.-M.-Arndt-Universität Greifswald

WS 17/18

Numerik Grundpraktikum

Übung 6

Aufgaben

1) Die Koeffizienten β_{qi} in den Adams-Verfahren sind durch die Formel

$$\beta_{qi} = \frac{1}{h} \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} L_{p-i}(x)\,\mathrm{d}x, \quad L_{p-i}(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq i}}^{q} \frac{x - x_{p-l}}{x_{p-i} - x_{p-l}}$$

gegeben. Zeige, dass $\sum_{i=0}^{q} \beta_{qi} = k + j$ gilt!

2) Schreibe ein Programm `AB3(a,b,h,y0,f)`, das eine Näherungslösung für das AWP

$$y'(x) = f(x,y(x)), \quad y(a) = y_0, \quad x \in [a,b], \quad y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

auf Basis des Adams-Bashforth-Dreischrittverfahrens

$$\eta_{p+1} = \eta_p + \frac{h}{12}\Big(23 f_p - 16 f_{p-1} + 5 f_{p-2}\Big)$$

mit Schrittweite h berechnet! Die Startwerte für das Verfahren sollen durch die Methode dritter Ordnung von Kutta

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

gewonnen werden. Teste das Programm an dem Beispiel

$$y'(x) = \frac{1}{1+4x^2} - 8y(x)^2, \quad y(0) = 0, \quad x \in [0,4].$$

a) Vergleiche den Fehler an der Stelle $x = 4$ mit dem Wert der exakten Lösung $y(x) = \frac{x}{1+4x^2}$! Welche Konvergenzordnung lässt sich vermuten?

b) Schreibe ein weiteres Programm `AB3AM3(a,b,h,y0,f,it)`, in dem das oben programmierte Verfahren als Prädiktormethode verwendet wird und `it` Korrektoriterationen mit dem Adams-Moulton-Dreischrittverfahren

$$\eta_{p+1} = \eta_p + \frac{h}{24}\Big(9f_{p+1} + 19f_p - 5f_{p-1} + f_{p-2}\Big)$$

durchgeführt werden. Löse damit das Problem aus Aufgabe a) und vergleiche die Fehler für verschiedene Werte von `it`!

c) Optimiere `AB3AM3` so, dass redundante Funktionsauswertungen vermieden werden!

Programmierhausaufgabe

1) Schreibe ein Programm `AB4AM3(a,b,h,y0,f,it)`, das eine Näherungslösung für das AWP

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(a) = y_0, \quad x \in [a,b], \quad y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

auf Basis der Prädiktor-Korrektor-Methode mit dem Adams-Bashforth-Vierschrittverfahren

$$\eta_{p+1} = \eta_p + \frac{h}{24}\Big(55f_p - 59f_{p-1} + 37f_{p-2} - 9f_{p-3}\Big)$$

als Prädiktormethode und dem Adams-Moulton-Dreischrittverfahren als Korrektor. Ersetze den Korrektor in einem zweiten Programm `AB4AM4(a,b,h,y0,f,it)` durch das Adams-Moulton-Vierschrittverfahren

$$\eta_{p+1} = \eta_p + \frac{h}{720}\Big(251f_{p+1} + 646f_p - 264f_{p-1} + 106f_{p-2} - 19f_{p-3}\Big).$$

Vermeide jeweils redundante Funktionsauswertungen! Die Startwerte für `AB4AM3` und `AB4AM4` sollen durch das klassische Runge-Kutta-Verfahren gewonnen werden. Teste beide Programme sowie das Programm `AB3AM3` aus der Übung an dem Beispiel

$$y'(x) = -5y(x) + 5x^2 + 2x, \quad y(0) = \frac{1}{3}, \quad x \in [0,1].$$

Vergleiche den Fehler an der Stelle $x = 1$ mit dem Wert der exakten Lösung

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-5x}$$

für `it` $= 0, 1, 5$ und verschiedene Schrittweiten h! Wie verändert sich der Fehler bezüglich der verschiedenen Programme und Korrektoriterationen?

Lösungen an `markus.stoeber95@web.de`

Abgabetermin: 01.12.2017, 10:00 Uhr