Prof. Dr. B. Kugelmann
Perner/Preuß
Institut für Mathematik und Informatik
E.-M.-Arndt-Universität Greifswald

WS 17/18

Numerik Grundpraktikum

Übung 10

Aufgaben

1) Bestimme mithilfe des ersten und zweiten assoziierten Polynoms die Konsistenzordnung
   a) des Adams-Moulton-Zweischrittverfahrens
   $$\eta_{p+2} - \eta_{p+1} = \frac{h}{12}(5f_{p+2} + 8f_{p+1} - f_p)$$
   b) und des Adams-Bashforth-Zweischrittverfahrens
   $$\eta_{p+1} = \eta_p + \frac{h}{2}(3f_p - f_{p-1})!$$
2) Welche konkrete Vorschrift ergibt sich für das folgende explizite Zweischrittverfahren mit variabler Schrittweite?
   $$\eta_{p+1} = \eta_p + \sum_{i=0}^{1} g_i f[x_p, \ldots, x_{p-i}], \quad g_i = \int_{x_p}^{x_{p+1}} \omega_i(t)\,\mathrm{d}t$$
   mit
   $$\omega_i(t) = (t - x_p)(t - x_{p-1}) \cdots (t - x_{p-i+1}), \quad \omega_0(t) = 1.$$
3) Leite ein rekursives Schema zur effizienten Berechnung der Werte g_i, $i = 0, \ldots, q$ aus Aufgabe 2 und
   $$g_i^* = \int_{x_p}^{x_{p+1}} (t - x_{p+1})\omega_{i-1}(t)\,\mathrm{d}t, \quad i = 1, \ldots, q$$
   her!

Hausaufgabe

1. Schreibe eine MATLAB-Funktion `divdiff(x,f)`, die die dividierten Differenzen
   $$f[x_p, \ldots, x_{p-i}], \quad i = 0, \ldots, q$$
   zu gegebenen Stützstellen `x` $= (x_p, \ldots, x_{p-q})$ und Funktionswerten
   `f` $= (f(x_p, \eta_p), \ldots, f(x_{p-q}, \eta_{p-q}))$ mithilfe der Rekursionsformel
   $$f[x_j] = f(x_j, \eta_j), \quad f[x_p, \ldots, x_{p-i}] = \frac{f[x_p, \ldots, x_{p-i+1}] - f[x_{p-1}, \ldots, x_{p-i}]}{x_p - x_{p-i}}$$
   berechnet!

2. Schreibe eine MATLAB-Funktion `[g,gstern]=gamma_schema(x)`, die die Koeffizienten

$$\begin{aligned}
\gamma_{i,0} &:= g_i = \int_{x_p}^{x_{p+1}} \omega_i(t)\,\mathrm{d}t, && i = 0,\dots,q,\\
\gamma_{i-1,1} &:= g_i^* = \int_{x_p}^{x_{p+1}} (t - x_{p+1})\omega_{i-1}(t)\,\mathrm{d}t, && i = 1,\dots,q,
\end{aligned}$$

mithilfe der Rekursionsformel

$$\begin{aligned}
\gamma_{0,j} &= -\frac{1}{j+1}(x_p - x_{p+1})^{j+1}\\
\gamma_{i,j} &= \gamma_{i-1,j+1} + (x_{p+1} - x_{p-i+1})\gamma_{i-1,j}
\end{aligned}$$

zu den Stützstellen $\mathtt{x} = (x_{p+1}, x_p, \dots, x_{p+1-q})$ berechnet!

3. Konstruiere mithilfe der beiden assoziierten Polynome ein konvergentes lineares Zweischrittverfahren möglichst hoher Ordnung!

   Tipp: Entwickle die Polynome und den Logarithmus um den Punkt $\mu = 1$ und bestimme die Koeffizienten dann so, dass

$$\phi(\mu) = \psi(\mu) - \chi(\mu)\ln\mu$$

   bei $\mu = 1$ eine Nullstelle möglichst hoher Ordnung hat. Leite dann die Verfahrensvorschrift aus den assoziierten Polynomen her!

Lösungen an `markus.stoeber95@web.de`

Abgabetermin: 12.01.2018, 10:00 Uhr