Prof. Dr. B. Kugelmann
Perner/Preuß
Institut für Mathematik und Informatik
Universität Greifswald

WS 17/18

Numerik Grundpraktikum

Übung 12

Aufgaben

1) Man untersuche, ob das folgende nichtlineare AWP

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1(t) &= -0.01 y_1(t) + 0.01 y_2(t), && y_1(0) = 0 \\
\dot{y}_2(t) &= y_1(t) - y_2(t) - y_1(t) y_3(t), && y_2(0) = 1 \\
\dot{y}_3(t) &= y_1(t) y_2(t) - 100 y_3(t), && y_3(0) = 1
\end{aligned}$$

zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ steif ist.

2) Gesucht sei eine Stabilitätsfunktion

$$g(z) = \frac{R(z)}{S(z)}$$

mit $\deg(R) = r$, $\deg(S) = s$. Man bestimme R und S mit $r = 0$ und $s = 2$ so, dass die Entwicklung von g möglichst gut mit der von e^z übereinstimmt.

3) Betrachte die autonome Differentialgleichung $y' = Ay$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie die Funktion

$$\hat{g}(hA) = I + hA + \frac{h^2}{2} A^2.$$

Zeige, dass ein Schritt des Heun-Verfahrens

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, \eta_i) \\
k_2 &= f(x_i + h, \eta_i + h k_1) \\
\eta_{i+1} &= \eta_i + h \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2 \right)
\end{aligned}$$

der Formel

$$\eta_{j+1} = \hat{g}(hA) \eta_j$$

entspricht!

Hausaufgaben

1) Betrachte die autonome Differenialgleichung $y' = Ay$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie die Funktion

$$\hat{g}(hA) = I + hA + \frac{h^2}{2}A^2 + \frac{h^3}{6}A^3 + \frac{h^4}{24}A^4.$$

Zeige, dass ein Schritt des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, \eta_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, \eta_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, \eta_i + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ k_4 &= f(x_i + h, \eta_i + hk_3) \\ \eta_{i+1} &= \eta_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

der Formel

$$\eta_{j+1} = \hat{g}(hA)\eta_j$$

entspricht!

2) Schreibe ein Programm `heun(a,b,h,y0,A)` bzw. `implMP(a,b,h,y0,A)`, das mithilfe des Heun-Verfahrens bzw. mithilfe der impliziten Mittelpunktsregel

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(x + \frac{1}{2}h, \eta_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ \eta_{i+1} &= \eta_i + hk_1 \end{aligned}$$

eine Näherungslösung des Anfangswertproblems vom Typ $y' = Ay$ berechnet. Teste das Programm an dem Beispiel $A = \begin{pmatrix} -51 & -49 \\ -49 & -51 \end{pmatrix}$, $a = 0$, $b = 1$, $y(0) = (1,1)^T$. Vergleiche die erhaltenen Lösungen für verschiedene Schrittweiten grafisch!

Lösungen an `markus.stoeber95@web.de`

Abgabetermin: 26.01.2018, 10:00 Uhr