Nachklausur zur Vorlesung „Numerik I“
bei Prof. Dr. Kugelmann

Datum: 06.10.2017 **Ort:** SR4 **Zeit:** 9:00 Uhr **Dauer:** 90 min

Die Antworten sind zu begründen.
Dabei können entsprechende Sätze aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1.
Zu berechnen ist

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}; \qquad x \in \left[10^{-12}, 10^{-3}\right].$$

a) Man formuliere einen auslöschungsfreien Algorithmus zur Berechnung von $f(x)$.
(ln, $\sqrt{\ }$ seien elementare Operationen)

b) Man untersuche die Kondition der Aufgabe: Abschätzung der relativen Konditionszahl

Aufgabe 2.
Betrachtet wird das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Man löse (1) mit dem Gauß-Algorithmus (ohne Pivotstrategie).

b) Man berechne die Dreieckszerlegung $A = L \cdot R$ der zugehörigen Matrix A.

c) Man prüfe, ob A positiv definit ist.

d) Man berechne die (irrationale) Cholesky-Zerlegung $A = \widetilde{L}^{\mathsf{T}} \widetilde{L}$ für A.

e) Man schreibe eine MATLAB-Funktion, welche für ein beliebiges Gleichungssystem

$$Ax = b; \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}; \qquad b \in \mathbb{R}^n$$

mit $A^{\mathsf{T}} = A$ die Schritte a) bis d) durchführt.
Eingabe: A, b
Ausgabe: x, L, R und $\widetilde{L}$, wobei $\widetilde{L} = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, falls A nicht positiv definit ist

Aufgabe 3.
Gesucht ist ein Polynom p vom Höchstgrad $2n+1$, welches an den paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ vorgegebene Werte y_i; $i = 0, \ldots, n$ *und* vorgegebene Ableitungswerte y_i'; $i = 0, \ldots, n$ annimmt, also

$$\begin{aligned} p(x_i) &= y_i; \\ p'(x_i) &= y_i'; \end{aligned} \qquad i = 0, \ldots, n; \quad p \in \prod_{2n+1}. \tag{2}$$

Mithilfe der Lagrange-Polynome

$$L_i(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^{n} \frac{x - x_l}{x_i - x_l}; \qquad i = 0, \ldots, n$$

definiert man

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &:= \left(1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)\right) L_i^2(x); \\ \psi_i(x) &:= (x - x_i) L_i^2(x); \end{aligned} \qquad i = 0, \ldots, n. \tag{3}$$

a) Man zeige

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_j) &= \delta_{ij}; & \psi_i(x_j) &= 0; \\ \varphi_i'(x_j) &= 0; & \psi_i'(x_j) &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

b) Man löse die Interpolationsaufgabe (2).

c) Man zeige, dass (2) genau eine Lösung hat.

Aufgabe 4.
Man bestimme die Parameter α, $\beta \in \mathbb{R}$ der Geraden $y(x) = \beta x + \alpha$ so, dass die Punktepaare

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	$1/2$	$1/2$	2	$7/2$	$7/2$

im Sinne der Fehlerquadratsumme möglichst gut approximiert werden, d. h.

$$\min \sum_{i=1}^{5} \left[y(x_i) - y_i\right]^2. \tag{4}$$

① $f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$, $x \in [10^{-12}, 10^{-3}]$

a) $x \approx 0 \longrightarrow \sqrt{1+x} \approx 1 \longrightarrow$ Auslöschung im Zähler ①

Umformung: $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$ ①

also $f(x) = -\ln(\sqrt{1+x} + 1)$ ①

Algorithmus: $\alpha_1 = 1 + x$,
$\alpha_2 = \sqrt{\alpha_1}$,
$\alpha_3 = \alpha_2 + 1$
$\alpha_4 = -\ln \alpha_3$ ①

b) Relative Konditionszahl $\kappa = \frac{x}{f(x)} f'(x)$

$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, ①

$\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$ ①

$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ streng monoton fallend
$f(x) < 0 \Rightarrow |f|$ " " wachsend

$x \in [10^{-12}, 10^{-3}] \Rightarrow |f(x)| \geq |f(0)| = \ln 2$ ①

$\Rightarrow |\kappa| \leq \frac{10^{-3}}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{4} \approx 0.36 \cdot 10^{-3}$ ①

gut konditioniert ①

2 a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$ 1

$$\Longrightarrow \underline{\underline{x_3 = 2, \; x_2 = 1, \; x_1 = -2}}$$ 1

b) Elemente von L sind Eliminationsfaktoren beim Gauß-Algorithmus

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ 2

c) Die Diagonalelemente von R sind positiv, 1
A ist symmetrisch
$\Longrightarrow$ A ist positiv definit 1

d) Mit $D = \operatorname{diag}(\sqrt{3}, \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \sqrt{3})$ gilt

$$A = L \cdot R = L \cdot D \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{3}\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}}_{=:\tilde{L}}$$ 1

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}\sqrt{3} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \tilde{L}^T \tilde{L}$$ 1

```
function [x,L,R,Lcholesky] = testAb(A,b)

% Teilschritte a),..,d) aus Klausur 6.10.2017
% Funktion ist gedacht f?r symmetrische Matrizen A
%
dim=size(b);
n=dim(1);
L=eye(n)
R=A
c=b;
%
x=zeros(n,1);
%
% Gau?algorithmus  A*x=b  ----->  R*x=c
% mit Speicherung der Eliminationsfaktoren
for spalte=1:n-1
    for zeile=spalte+1:n
        elifaktor=R(zeile,spalte)/R(spalte,spalte);
        L(zeile,spalte)=elifaktor;
        R(zeile,spalte:n)=R(zeile,spalte:n) - elifaktor*R(spalte,spalte:n);
        c(zeile)=c(zeile)-elifaktor*c(spalte);
    end %zeile
end %spalte
%
% R?cksubstitution
for zeile=n:-1:1
    x(zeile)=(c(zeile)-R(zeile,zeile+1:n)*x(zeile+1:n))/R(zeile,zeile);
end % Zeile
%
% Test auf positiv definit und Cholesky-Zerlegung
Lcholesky=L;
%
spalte=1;
while spalte<=n && R(spalte,spalte)>=0
    Lcholesky(:,spalte)=Lcholesky(:,spalte)*sqrt(R(spalte,spalte));
    spalte=spalte+1;
end % while
if spalte<=n
    disp('Matrix ist nicht positiv definit')
    Lcholesky=zeros(n,n);
end % if


end
```

③ $\varphi_i(x) = (1-2L_i'(x_i)(x-x_i))L_i^2(x)$,
$\psi_i(x) = (x-x_i)L_i^2(x)$

a) $\varphi_i(x_i) = (1-2L_i'(x_i)\underbrace{(x_i-x_i)}_{0})\underbrace{L_i^2(x_i)}_{1} = 1$

$j \neq i: \varphi_i(x_j) = (1-2L_i'(x_i)(x_j-x_i))\underbrace{L_i(x_j)}_{0} = 0$,

$\Longrightarrow \underline{\underline{\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}}}$ ①

$$\left.\begin{array}{l} \psi_i(x_i) = \underbrace{(x_i-x_i)}_{0}L_i^2(x_i) = 0 \\ j \neq i: \psi_i(x_j) = (x_j-x_i)\underbrace{L_i^2(x_j)}_{0} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\psi_i(x_j) = 0}}$$ ①

$\varphi_i'(x) = -2L_i'(x_i)L_i^2(x) + (1-2L_i'(x_i)(x-x_i))2L_i(x)L_i'(x)$,

$\varphi_i'(x_i) = -2L_i'(x_i)\underbrace{L_i^2(x_i)}_{1} + (1-2L_i'(x_i)\cdot 0)2\underbrace{L_i(x_i)}_{1}L_i'(x_i)$
$= 0$,

$j \neq i: \varphi_i'(x_j) = -2L_i'(x_i)\underbrace{L_i^2(x_j)}_{0} +$

$+ (1-2L_i'(x_i)(x_j-x_i))2\underbrace{L_i(x_j)}_{0}L_i'(x_j) = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{\varphi_i'(x_j) = 0}}$ ①

$\psi_i'(x) = L_i^2(x) + (x-x_i)2L_i(x)L_i'(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \psi_i'(x_i) = \underbrace{L_i^2(x_i)}_{1} + \underbrace{(x_i-x_i)}_{0}2L_i(x_i)L_i'(x_i) = 1 \\ j \neq i: \psi_i'(x_j) = \underbrace{L_i^2(x_j)}_{0} + (x_j-x_i)2\underbrace{L_i(x_j)}_{0}L_i'(x_j) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{\underline{\psi_i'(x_j) = \delta_{ij}}}$$ ①

b) Es gilt $\varphi_i \in \Pi_{2n+1}$ und $\psi_i \in \Pi_{2n+1}$ (1)

Betrachte

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i' \psi_i(x)$$ (1)

Dann gilt: $p \in \Pi_{2n+1}$

und $p(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i \delta_{ij} + \sum_{i=0}^{n} y_i' 0 = y_j$ (1)

und $p'(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_i'(x_j) + \sum_{i=0}^{n} y_i' \psi_i'(x_j) =$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i 0 + \sum_{i=0}^{n} y_i' \delta_{ij} = y_j'$$ (1)

Also löst p die Interpolationsaufgabe

c) Falls q ein zweites Polynom aus Π_{2n+1} ist, welches (2) löst, dann gilt für $r = p - q$:

$r \in \Pi_{2n+1}$ (1)

und r hat $n+1$ verschiedene und doppelte Nullstellen $x_0, \dots, x_n$ (1)

$\Longrightarrow r = 0 \Longrightarrow p = q$ (1)

(4) $\sum_{i=1}^{n}(y(x_i)-y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\beta x_i+\alpha-y_i)^2$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

$$=: \| A z - b \|_2^2 \longrightarrow \min \qquad (1)$$

also Ausgleichsproblem

Notwendige und hinreichende Bedingung für ein Minimum z_0:

$$A^T A z_0 = A^T b \qquad (1)$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}; \quad A^T b = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Also $z_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix}$ bzw. $\underline{\underline{\alpha_0 = 2, \beta_0 = 0.9}}$, (1)

```
A=[3,2,3;2,2,2;3,2,6]
b=[2;2;8]

% A=[3,2;2,6]
% b=[2;2]
%
% A=[4,1,1,1;1,3,1,1;1,1,2,1;1,1,1,1];
% b=[12;11;10;9]

[x,L,R,Lcholesky]=testAb(A,b)
```