Prof. Dr. B. Kugelmann
Johann Jakob Preuß
Institut für Mathematik und Informatik
E.-M.-Arndt-Universität Greifswald

SS 2017

Numerik I

Übung 1

1. Es sei

$$Z := \left\{ \pm \left(m_1 2^{-1} + m_2 2^{-2} + m_3 2^{-3} + m_4 2^{-4} \right) 2^E \mid -2 \le E \le 2, m_i \in \{0,1\}, m_1 = 1 \right\}$$

   a) Welche Gleitpunktzahlen liegen in Z? Gib B, t, α und β an!

   b) Bestimme die größte Zahl $x_{\max}$ und die kleinste positive Zahl $x_{\min}$ von Z.

2. Näherungen für die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ sind:

$$\begin{aligned} \Delta_1 f(x,h) &:= \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \\ \Delta_2 f(x,h) &:= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \\ \Delta_3 f(x,h) &:= \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}, \ h \ge 0 \end{aligned}$$

   a) Zeige ohne Taylorentwicklung: Für jede Gerade $g(x)$ ist $\Delta_1 g(x,h) = g'(x)$, und für jedes quadratische Polynom $P_2(x)$ gilt $\Delta_2 P_2(x,h) = P_2'(x)$.

   b) Zeige mit Hilfe der Taylorreihenentwicklung für $f \in C^3$:

$$\Delta_2 f(x,h) = f'(x) + \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \qquad \xi \in]x-h, x+h[.$$

3. Es sei $f \in C^3$ und

$$M_1 := \max_{0 \le t \le h} |f''(x+t)|.$$

   Bei der numerischen Rechnung erhalten wir F_1 und F_2 anstelle von $f(x+h)$ und $f(x)$. Dabei soll gelten $|F_1 - f(x+h)| \le \varepsilon$ und $|F_2 - f(x)| \le \varepsilon$.

   Schätze

$$\left| \frac{F_1 - F_2}{h} - f'(x) \right|$$

   in Abhängigkeit von h, ε und M_1 nach oben ab.

Papierhausaufgaben

1. Bestimme bei Übungsaufgabe 1 den minimalen und maximalen Abstand zweier aufeinanderfolgender positiver Zahlen für Z.

2. Zeige für $f \in C^5$ (Übungsaufgabe 2):

$$\Delta_3 f(x,h) = f'(x) + \mathcal{O}(h^4).$$

   Für welche Funktionen $f(x)$ ist $\Delta_3 f(x,h) = f'(x)$?

3. Ermittle h bei Übungsaufgabe 3 so, dass die in a) berechnete Schranke minimal wird, und gib das Minimum an.

Programmierhausaufgaben

Schreibe ein MATLAB-Programm, das für $x = 1$ und $h = 1, 10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-18}$ die Werte $\Delta_1 f(x,h)$, $\Delta_2 f(x,h)$ und $\Delta_3 f(x,h)$ berechnet (Übungsaufgabe 2).
Teste das Programm an den Funktionen $f_1(x) = e^x$ und $f_2(x) = \ln(x+2)$.
Bestimme zusätzlich die analytischen Ableitungen und stelle die Ergebnisse in jeweils einer Tabelle der folgenden Form dar:

h	Δ_1	Δ_2	Δ_3	exakte Ableitung von f_i
1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10^{-18}	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Was kann man anhand der Ergebnisse feststellen?

Programme an `johannjakob.preuss@uni-greifswald.de`
Abgabetermin: 12.04.2017 14:00 Uhr

- Quellcode gut kommentieren
- Nachname = Programmname oder als zip/rar-Datei mit Nachnamen als Dateinamen (*preuss.m* bzw. *preuss.zip*)
- Protokoll (Ein- und Ausgabe) und Auswertung als txt-Datei beifügen oder im Quellcode als Kommentar mitliefern