Prof. Dr. B. Kugelmann
Johann Jakob Preuß
Institut für Mathematik und Informatik
E.-M.-Arndt-Universität Greifswald

SS 2017

Numerik I

Übung 2

1. Wir definieren den *absoluten Fehler* ε_{abs} und den *relativen Fehler* ε_{rel} durch

$$\varepsilon_{abs} := |x - \mathrm{rd}(x)|$$
$$\varepsilon_{rel} := \left|\frac{x - \mathrm{rd}(x)}{x}\right|, \quad x \neq 0$$

   Wie sehen absoluter und relativer Fehler aus, wenn man eine sehr kleine positive Zahl x durch $\mathrm{rd}(x) = 0$ ersetzt?

2. Es sei $a := 10^6 + 2$, $b := 10^6 - 1$.
   a) Berechne unter Verwendung von 10 Dezimalstellen $((a+b)(a-b))^2$ (Zwischenergebnisse mit angeben).
   b) Berechne den relativen Fehler (2 gültige Ziffern genügen).

3. Gib die Fehlerfortpflanzungen der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ (absoluter Fehler) an.

4. Berechne die kleinere der beiden Lösungen der Gleichung $x^2 - 1.8x + 0.0001 = 0$, ($p = 0.9$, $q = 1 \cdot 10^{-4}$) unter der Annahme einer vierstelligen Mantisse zur Basis 10. Bestimme den relativen Fehler!

   Algorithmus I : $x_1 = p - \sqrt{p^2 - q}$,

   Algorithmus II : $x_2 = p + \sqrt{p^2 - q}$, $x_1 = \dfrac{q}{x_2}$.

5. Es seien $I_0, \ldots, I_n$

$$I_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}} \left(x^n \mathrm{e}^x \big|_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \right) = 1 - nI_{n-1}$$

   zu berechnen. Analysiere den Fehler, der bei dieser Rekursion entsteht. Überlege, wie man die Rekursion besser gestalten kann, um den Fehler zu minimieren.

Papierhausaufgaben

1. Bekanntlich gilt
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$
Gilt das auch in der Computerarithmetik? Begründe deine Entscheidung!

2. Gib die Fehlerfortpflanzung von $f(x,y) = y\sin(x)$ (und den absoluten Fehler) in erster Näherung an! Entwickle dabei zunächst bis zum Restglied R_2!

Programmierhausaufgaben

Eine numerische Berechnung der Zahl π

Am Einheitskreis werde ein regelmäßiges n-Eck der Seitenlänge σ_n um- und ein regelmäßiges n-Eck der Seitenlänge s_n einbeschrieben. Anschließend betrachte man regelmäßige $2n$-Ecke. Mittels einfacher geometrischer Beziehungen kann man die folgenden Formeln (Algorithmus I) für alle n herleiten. Offenbar gilt für den Kreis $ns_n < 2\pi < n\sigma_n$. Aus dieser Abschätzung kann man 2π berechnen.

Startwerte: $\sigma_4 = 2$ und $s_4 = \sqrt{2}$.

Algorithmus I:

$$s_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}},$$
$$\sigma_{2n} = \frac{2}{\sigma_n}\left(\sqrt{4+\sigma_n^2}-2\right).$$

Algorithmus II:

$$s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-s_n^2}}},$$
$$\sigma_{2n} = \frac{\sigma_n}{1+\sqrt{1+\frac{\sigma_n^2}{4}}}.$$

Programmiere beide Varianten für verschiedene $n \leq 2^{20}$. Welcher Algorithmus liefert die besseren Ergebnisse?
Programme an `philipp.vitense@stud.uni-greifswald.de`
Abgabetermin: 25.04.2017 14:00 Uhr

- Quellcode gut kommentieren
- Nachname = Programmname oder als zip/rar-Datei mit Nachnamen als Dateinamen (*preuss.m* bzw. *preuss.zip*)
- Protokoll (Ein- und Ausgabe) und Auswertung als txt-Datei beifügen oder im Quellcode als Kommentar mitliefern