Prof. Dr. B. Kugelmann
Johann Jakob Preuß
Institut für Mathematik und Informatik
E.-M.-Arndt-Universität Greifswald

SS 2017

# Numerik I

## Übung 4

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -16 & 18 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass das System unendlich viele Lösungen hat, und gib die allgemeine Lösung des Systems an.

2.

$$\begin{pmatrix} 0.00035 & 1.2654 \\ 1.2547 & 1.3182 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5267 \\ 6.8541 \end{pmatrix}.$$

a) Löse das Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus! Verwende dabei eine fünfstellige dezimale Gleitpunktarithmetik. Vergleiche die erhaltene Lösung mit der Lösung $x_1 = 2.5354$, $x_2 = 2.7863$, die mit MATLAB berechnet wurde.

b) Schreibe die Koeffizientenmatrix als Produkt einer linken unteren und einer rechten oberen Dreiecksmatrix (LR-Zerlegung).

c) Löse das Gleichungssystem nochmals mit dem Gauß-Algorithmus, jedoch nun mit Spaltenpivotisierung! Verwende wieder eine fünfstellige dezimale Gleitpunktarithmetik und vergleiche die erhaltene Lösung mit der obigen MATLAB-Lösung.

3. Gegeben sei das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) Löse das Gleichungssystem mithilfe der LR-Zerlegung.

b) Bei der Anwendung des Gauß-Algorithmus entsteht ein Gleichungssystem $Rx = L^{-1}b$. Gib $L^{-1}$ an.

c) Löse das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

## Papierhausaufgaben

1. Für welche $x$ würde es bei folgenden Funktionen zu Auslöschungen kommen, und wie kann man das verhindern?
   a) $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
   b) $\frac{1-\cos x}{\sin(x)}$
2. Löse das untenstehende Gleichungssystem und gib sowohl die Lösung $x$ als auch die LDR-Zerlegung an – Koeffizientenmatrix als Produkt einer linken unteren Dreiecksmatrix $L$ (mit Einsen auf der Hauptdiagonale), einer Diagonalmatrix $D$ und einer rechten oberen Dreiecksmatrix $R$ (mit Einsen auf der Hauptdiagonale).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -15 \\ 107 \end{pmatrix}.$$

## Programmierhausaufgaben

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Tridiagonalmatrix, d. h. $a_{ij} = 0$ für $|\text{i - j}| > 1$, sodass $A$ geschrieben werden kann als

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & & & \\ d_1 & a_2 & c_2 & & & \\ 0 & d_2 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} & \\ & & & d_{n-1} & a_n & \end{pmatrix}.$$

a) Schreibe eine `function` für die LR-Zerlegung von A, welche nur auf den Eingabevektoren $a \in \mathbb{R}^n$ und $c$, $d \in \mathbb{R}^{n-1}$ arbeitet. Ausgabe sollen die nichttrivialen Elemente von $L$ und $R$ sein.

b) Schreibe eine zweite `function`, die als Eingabe die Ausgabe der ersten `function` sowie einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ akzeptiert. Ausgabe soll die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ sein.

Teste das Programm mithilfe eines `scripts` an dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Programme an: `philipp.vitense@stud.uni-greifswald.de`
**Abgabetermin: 09.05.2017, 14:00 Uhr**