Prof. Dr. B. Kugelmann
Johann Jakob Preuß
Institut für Mathematik und Informatik
E.-M.-Arndt-Universität Greifswald

SS 2017

Numerik I

Übung 5

1. Seien $v \in \mathbb{R}^n$ und $w \in \mathbb{R}^m$ für $n, m \in \mathbb{N}$ gegeben.
   a) Wie wird vw^T berechnet?
   b) Welche Dimension und welchen Rang hat diese Matrix?
   c) Wie lässt sich der folgende Eliminationsschritt in MATLAB effizient umsetzen?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & z_1^T \\ s_1 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & z_1^T \\ 0 & B - s_1 z_1^T / a_{11} \end{pmatrix}$$

2. Der Operator $\|\cdot\|_\infty$ definiert eine Abbildung $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ durch

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

   Zeige, dass gilt:
   a) $A \neq 0 \Rightarrow \|A\|_\infty > 0$
   b) $\|\lambda \cdot A\|_\infty = |\lambda| \|A\|_\infty$
   c) $\|A + B\|_\infty \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$
   d) $\|A \cdot x\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|x\|_\infty$ für $x \in \mathbb{R}$

3. Unter Zeilenskalierung versteht man die Multiplikation eines Gleichungssystems mit einer Diagonalmatrix D von links:

$$Ax = b \to DAx = Db.$$

   Die Skalierung wird durchgeführt mit dem Ziel der Verkleinerung der Konditionszahl ($\kappa(DA) \leq \kappa(A)$) bzw. der Verbesserung der numerischen Eigenschaften des Gleichungssystems in Bezug auf die Fortpflanzung der Dateneingangsfehler ΔA und Δb.

   Zeilenäquilibrierung ist die spezielle Form der Zeilenskalierung, bei der

$$d_{ii} = \frac{\|A\|_\infty}{\sum_j |a_{ij}|} \qquad \text{bzw.} \qquad d_{ii} = \frac{1}{\sum_j |a_{ij}|}$$

   gewählt wird.

Wie lautet die Systemmatrix DA nach Zeilenäquilibrierung für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 100 & 2 & 0 \\ 3 & 1000 & 1 & 4 \\ 10 & 1 & 9 & 20 \\ 6 & 0 & 8 & 6 \end{pmatrix}?$$

Gib die Konditionszahlen von A und DA mithilfe von MATLAB (`cond`) an.

Papierhausaufgaben

1. Zeige, dass die *Frobeniusnorm*

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$$

eine Matrixnorm ist.

a) Zeige, dass sie äquivalent zur euklidischen Norm eines Vektors ist, der die Zeilen der Matrix nacheinander enthält.

b) Beweise folgende Ungleichung:

$$\sum_{i,j} |a_{ij}||b_{ij}| \leq \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} \sqrt{\sum_{i,j} |b_{ij}|^2}$$

c) Überprüfe die drei Eigenschaften einer Norm.

2. Löse das folgende Gleichungssystem zunächst ohne und dann mit Zeilenäquilibrierung. Verwende dabei den Gaußalgorithmus mit Spaltenpivotisierung und eine fünfstellige Gleitpunktarithmetik.

$$\begin{pmatrix} 2{,}1 & 2512 & -2516 \\ -1{,}3 & 8{,}8 & -7{,}6 \\ 0{,}9 & -6{,}2 & 4{,}6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ -5{,}3 \\ 2{,}9 \end{pmatrix}$$

Vergleiche die Ergebnisse mit der exakten Lösung $x_1 = 5$, $x_2 = x_3 = 1$.

Programmierhausaufgaben

Es sollen die numerischen Schwierigkeiten bei der numerischen Lösung von linearen Gleichungssystemen $Ax = b$ mithilfe der Gaußelimination gezeigt werden. In MATLAB wird diese durch `x = A\b` genutzt.
Als Koeffizientenmatrix wird die Hilbertmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \qquad\qquad i, j = 1, \ldots, n$$

verwendet (MATLAB: `help hilb`). Die exakte Lösung x soll der Vektor sein, der nur aus Einsen besteht. Ausgegeben werden sollen jeweils nebeneinander die exakte und numerisch berechnete Lösung für $n = 10, \ldots, 20$. Weiterhin soll auch die Konditionszahl ausgegeben werden. Ziehe Rückschlüsse in Bezug auf die Konditionszahl und die numerisch berechnete Lösung.

Programme an: `philipp.vitense@stud.uni-greifswald.de`
Abgabetermin: 16.05.2017, 14:00 Uhr