

Numerik I

Übung 6

1. Zeige, dass durch die Maximumnorm  $\|\cdot\|_\infty$  die Operatornorm

$$\|A\|_\infty := \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

definiert wird. Ist dies eine mit der Maximumnorm verträgliche Matrixnorm?

2. Es sei  $A$  invertierbar und es gelte  $Ax = b$  sowie  $Ax^* = b^*$ . Sowohl  $x$  als auch  $b$  entsprechen nicht dem Nullvektor. Die Konditionszahl von  $A$  ist

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

- (a) Berechne für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

die Konditionszahlen  $\text{cond}_1(A)$ ,  $\text{cond}_2(A)$  und  $\text{cond}_\infty(A)$ .

- (b) Zeige, dass

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|b - b^*\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - x^*\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|b - b^*\|}{\|b\|}.$$

- (c) Schätze den relativen Fehler von  $x$  für das folgende Beispiel ab:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \quad b^* = \begin{pmatrix} 101/200 \\ 99/300 \\ 49/200 \end{pmatrix}.$$

3. Gegeben sei die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Sind die Voraussetzungen für die Cholesky-Zerlegung erfüllt?  
(b) Berechne, falls möglich, die Cholesky-Zerlegung!

## Papierhausaufgaben

1. Zeige, dass für die Konditionszahl invertierbarer, quadratischer Matrizen  $A$  und  $B$  folgende Eigenschaften gelten:

- (a)  $\text{cond}(A) \geq 1$ ,
- (b)  $\text{cond}(cA) = \text{cond}(A)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$
- (c)  $\text{cond}(AB) \leq \text{cond}(A) \text{cond}(B)$ .

Dabei werde die Konditionszahl über eine beliebige vektorinduzierte Matrixnorm definiert.

2. Löse mithilfe des Cholesky-Verfahrens das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und zeige, dass die Voraussetzungen für die Cholesky-Zerlegung erfüllt sind.

## Programmierhausaufgaben

Schreibe ein Programm, das eine symmetrische Matrix mittels Cholesky-Zerlegung in ein Produkt zweier Dreiecksmatrizen zerlegt. Dabei muss nur eine Dreiecksmatrix ausgegeben werden. Überprüfe dein Programm an den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & -10 & -2 \\ -10 & 20 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Programme an: [philipp.vitense@stud.uni-greifswald.de](mailto:philipp.vitense@stud.uni-greifswald.de)

**Abgabetermin: 23.05.2017, 14:00 Uhr**

- Quellcode gut kommentieren
- Nachname = Programmname oder als zip/rar-Datei mit Nachnamen als Dateinamen (*preuss.m* bzw. *preuss.zip*)
- Protokoll (Ein- und Ausgabe) und Auswertung als txt-Datei beifügen oder im Quellcode als Kommentar mitliefern