Prof. Dr. B. Kugelmann
Johann Jakob Preuß
Institut für Mathematik und Informatik
E.-M.-Arndt-Universität Greifswald

SS 2017

Numerik I

Übung 8

1. Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ sowie zugehörige Messwerte $y_0 = 1$, $y_1 = 3$ und $y_2 = 2$. Berechne den Wert des Interpolationspolynoms $P_2(\cdot)$ an der Stelle $x = 2$ mithilfe
   (a) des Interpolationspolynoms von Lagrange,
   (b) des Algorithmus von Neville,
   (c) des Interpolationspolynoms von Newton.

2. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ mit den entsprechenden Stützwerten $y_i = f(x_i)$ für $i = 0, 1, 2$.
   (a) Berechne das Interpolationspolynom $P_2(\cdot)$ durch den allgemeinen Ansatz (Lösung eines linearen Gleichungssystems) und über Newton-Interpolation.
   (b) Stelle die Funktion $f(x)$ und $P_2(x)$ im Intervall $[-1, 4]$ dar. Was ist zu erkennen?
   (c) Bestimme das Interpolationspolynom $P_3(\cdot)$ unter Hinzunahme der Stützstelle $x_3 = -1$ und des Stützwertes $y_3 = f(x_3)$ mithilfe des allgemeinen Ansatzes.
   (d) Berechne $P_3(2)$ mittels Newton-Interpolation und Horner-Schema.

Papierhausaufgaben

1. Bestimme das Interpolationspolynom vom Grade 2 (3), das an den Stellen $x = -1, 0, 2\ (, 1)$ die Werte von $f(x) = 2^x$ annimmt, mithilfe des allgemeinen Ansatzes, der Lagrangeschen und der Newtonschen Formel.

2. Schätze den Fehler der Näherung der obigen Aufgabe für $n = 2$ mit den Stützstellen $x = -1, 0$ und 2 ab.

Programmierhausaufgaben

In Zahlentafeln wird linear interpoliert. Wir suchen den Wert $p = \ln(1{,}53)$, wobei wir die Stützstellen $x = 1{,}4$, $1{,}5$, $1{,}6$ und $1{,}7$ sowie die dazugehörigen Funktionswerte $\ln(x)$ gegeben haben. Mithilfe dieser Werte soll über Newton-Interpolation und das Horner-Schema p berechnet werden. Schreibe ein Programm, das obige Aufgabenstellung realisiert.
Berechne die Werte p_i für verschiedene Interpolationspolynome i-ten Grades für $i = 1$, 2 und 3. Bestimme weiterhin jeweils den absoluten und relativen Fehler. Beurteile die Güte der Approximation in Bezug auf den Polynomgrad und die Wahl der Stützstellen.

Fehler bei Polynominterpolation

Wenn die Stützwerte y_i als Funktionswerte $f(t_i)$ einer $C^{n+1}[a,b]$-Funktion f aufgefasst werden, so gilt:

$$f(t) - p(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (t - t_i) \qquad a < \xi < b \quad t \in [t_0, t_n]$$

$$\Rightarrow |f(t) - p(t)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{t \in [t_0, t_n]} \left| \prod_{i=0}^{n} (t - t_i) \right| \sup_{a<\xi<b} |f^{(n+1)}(\xi)|$$

Für $n = 1$ erhalten wir

$$|f(t) - p(t)| \leq \frac{1}{2} \max_{t \in [t_0, t_1]} |(t - t_0)(t - t_1)| \sup_{a<\xi<b} |f''(\xi)| \qquad t \in [t_0, t_1].$$

Extrema bestimmen von $g(t) = (t - t_0)(t - t_1)$ (und von $|f''(\xi)|$ für $a \leq \xi \leq b$):

$$g'(t) = t - t_1 + t - t_0 = 2t - t_0 - t_1$$
$$g'(t^*) = 0 \Rightarrow t^* = \frac{t_0 + t_1}{2}$$

Dies ist Maximumstelle von $|g(t)|$ für $t_0 \leq t \leq t_1$, da $g(t_0) = g(t_1) = 0$. Somit erhalten wir für $h = t_1 - t_0$ den Wert $|g(t^*)| = \frac{h^2}{4}$ und

$$|f(t) - p(t)| \leq \frac{h^2}{8} \sup_{a<\xi<b} |f''(\xi)|.$$

Programme an: `philipp.vitense@stud.uni-greifswald.de`
Abgabetermin: 13.06.2017, 14:00 Uhr

- Quellcode gut kommentieren
- Nachname = Programmname oder als zip/rar-Datei mit Nachnamen als Dateinamen (*preuss.m* bzw. *preuss.zip*)
- Protokoll (Ein- und Ausgabe) und Auswertung als txt-Datei beifügen oder im Quellcode als Kommentar mitliefern