Prof. Dr. B. Kugelmann
Johann Jakob Preuß
Institut für Mathematik und Informatik
E.-M.-Arndt-Universität Greifswald

SS 2017

Numerik I

Übung 9

1. **Hermite-Interpolation**

   a) Bestimme das Polynom $p(x)$ minimalen Grades mit $p(1) = -2$, $p'(1) = 4$, $p(2) = 7$ und $p'(2) = 16$.

   b) Eine Funktion u lasse sich darstellen als

   $$u(x) = u_0\varphi_0(x) + u_1\varphi_1(x) + u_2\psi_0(x) + u_3\psi_1(x)$$

   mit den Basisfunktionen φ_i und ψ_i, welche die folgenden Eigenschaften haben

   $$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad \varphi_i'(x_j) = 0 \qquad \psi_i(x_j) = 0 \qquad \psi_i'(x_j) = \delta_{ij} \qquad \forall i, j = 0, 1.$$

   Bestimme auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$ die Basisfunktionen. Welche Eigenschaften erfüllt $u(x)$ mit diesen Basisfunktionen?

2. Zeige, dass

   $$\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left[f_1\frac{2x+b-3a}{b-a} + s_1(x-a)\right] + \frac{(a-x)^2}{(a-b)^2}\left[f_2\frac{2x+a-3b}{a-b} + s_2(x-b)\right]$$

   das eindeutige Polynom dritten Grades ist, welches für $a < b$ und vorgegebene Werte $f_1, s_1, f_2, s_2 \in \mathbb{R}$ die Interpolationsaufgabe $p(a) = f_1$, $p'(a) = s_1$, $p(b) = f_2$ und $p'(b) = s_2$ erfüllt.

Papierhausaufgaben

1. Sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, jene Abbildung bzw. jener Operator, die bzw. der einer beliebigen Funktion $f \in C[a, b]$ das interpolierende Polynom $p \in \Pi_n$ vom Grade n mit den Stützstellen $x_0 < x_1 < \cdots < x_n \in [a, b]$ zuordnet:

   $$I_n : C[a, b] \to \Pi_n, \qquad\qquad I_n(f) = p$$

   Zum Beispiel gilt in der Lagrange-Darstellung

   $$(I_n(f))(x) = p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_n^i(x) \qquad\qquad L_n^i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Zeige, dass

(a) die Abbildung I_n linear ist,

(b) die Abbildung I_n beschränkt bzgl. der Maximumnorm $||\cdot||_\infty$ auf $[a, b]$ ist, d. h.

$$\exists c > 0 \; \forall f \in C[a, b] : ||I_n(f)||_\infty \leq c||f||_\infty,$$

wobei die Konstante c nur von $[a, b]$, n und den Stützstellen x_i, aber nicht von f abhängt.

2. Bestimme mithilfe des Ansatzes aus Übungsaufgabe 1(b) das Interpolationspolynom $p \in \Pi_3$, welches folgende Eigenschaften erfüllt:

$$p(0) = f_0 \qquad p'(0) = s_0 \qquad p(2) = f_1 \qquad p''(2) = k_1.$$

Gib p und die verwendeten Basisfunktionen an.

Programmierhausaufgaben

Interpoliere die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ mithilfe des allgemeinen Ansatzes im Intervall $[-1, 1]$ unter Verwendung von 5, 11 und 19 äquidistanten Stützstellen und gib sowohl f als auch das zugehörige Interpolationspolynom in einem Plot aus. Welche Aussagen über die Qualität der Approximation können getroffen werden?

Hinweis: Das Programm soll für beliebige Intervalle $[a, b]$, $n+1$ äquidistante Stützstellen mit $x_0 = a$ sowie $x_n = b$ und beliebige Funktionen f geschrieben werden.

Programme an: `philipp.vitense@stud.uni-greifswald.de`
Abgabetermin: 27.06.2017, 14:00 Uhr

- Quellcode gut kommentieren
- Nachname = Programmname oder als zip/rar-Datei mit Nachnamen als Dateinamen (*preuss.m* bzw. *preuss.zip*)
- Protokoll (Ein- und Ausgabe) und Auswertung als txt-Datei beifügen oder im Quellcode als Kommentar mitliefern