Fouriertransformation und Distributionentheorie
Übungsblatt 1
SoSe 2017

1. Zeigen Sie:
(a) $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum des Banachraumes

$$(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}), \| \ \|_\infty).$$

(b) $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ und für jede Funktion $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ existiert eine Folge f_n von Funktionen aus $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

(c) $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ ist gleich dem Abschluss von $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ bzgl.$\| \ \|_\infty$.

2. Sei $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$. dann gilt $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \subset \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ und $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ ist gleich dem Abschluss von $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ (und von $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$) bzgl. der Norm $\| \ \|_p$ von $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$.

3. Sei $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Setze

$$\varphi(y) := \int |f(x+y) - f(x)| \mathrm{d}x$$

für $y \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ stetig im Punkte $y = 0$ ist.

4. **(a)** Berechnen Sie $\hat{f}$ für die Indikatorfunktion $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ eines Intervalls $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.
(b) Berechnen Sie

$$\mathbf{1}_{[-n,+n]} \star \mathbf{1}_{[-1,+1]} \tag{1}$$

explizit.
(c) Zeigen Sie, dass (1) die Fouriertransformierte einer Funktion $f_n \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ist und dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \infty.$$

(d) Schließen Sie, dass die Fouriertransformation den Raum $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ auf eine *echte* Teilmenge von $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ abbildet (Hinweis: "Satz vom stetigen Inversen" aus der Funktionalanalysis).