Fouriertransformation und Distributionentheorie
Übungsblatt 2
SoSe 2017

1. Berechnen Sie die Fouriertransformierte der folgenden Funktionen
(a)

$$f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|},\ a \in \mathbb{R},\ a > 0$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\tau}} & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

wobei $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$.
(c) Berechnen Sie die Faltung $f \star g$ für die Funktionen f aus Aufgabenteil (a) und $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ mit

$$g(x) = \cos(bx),\ b \in \mathbb{R}.$$

2. Gegeben seien Funktionen f und g in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Betrachte die Funktion

$$h(x) = 4f(x-4) + 3\mathrm{e}^{-2x}\, g''(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass h wieder in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegt, und drücken Sie $\hat{h}$ mit Hilfe von $\hat{f}$ und $\hat{g}$ aus.

3.**(a)** Finden Sie mit Hilfe der Fouriertransformation eine Lösung u der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$u(x) - u''(x) = \mathrm{e}^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}.$$

(b) Liegt u in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$? Was können Sie über die Eindeutigkeit der Lösung sagen?

4. Wir setzen

$$H(x) := \mathrm{e}^{-|x|},\ x \in \mathbb{R},$$

und ($x \in \mathbb{R}$)

$$h_\lambda(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int H(\lambda y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}yx}\mathrm{d}(y),\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0.$$

Zeigen Sie:
(a) Die Funktion h_λ liegt in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ und es gilt

$$(f \star h_\lambda)(x) = \int H(\lambda y)\hat{f}(y)\mathrm{e}^{ixy}\mathrm{d}y$$

für alle $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. (Insbesondere ist die Funktion $y \mapsto H(\lambda y)\hat{f}(y)\mathrm{e}^{ixy}$ in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ für alle $x \in \mathbb{R}$.)
(b) Für $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ gilt

$$\lim_{\lambda \to 0} \|f \star h_\lambda - f\|_1 = 0.$$

(c) Wenn für $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ auch $\hat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, dann liegt die Funktion $g = \check{\hat{f}}$ in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ und $g = f$ f. ü.
(d) $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$ f. ü.