Fouriertransformation und Distributionentheorie
Übungsblatt 3
SoSe 2017

1. **(a)** Für $f \in W^m(\mathbb{R})$ und $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ liegt fg in $W^m(\mathbb{R})$ und es gilt die *Leibniz-Regel*

$$D^{(n)}(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big(D^{(k)} f\big)\big(D^{n-k} g\big).$$

(b) Zeigen Sie, dass $D^{(n)}f$ für alle $f \in W^{m+n}(\mathbb{R})$ in $W^m(\mathbb{R})$ liegt und dass

$$D^{(n)} : W^{m+n}(\mathbb{R}) \to W^m(\mathbb{R})$$

ein (norm-)stetiger linearer Operator von dem Hilbertraum $W^{m+n}(\mathbb{R})$ nach dem Hilbertraum $W^m(\mathbb{R})$ ist.

2. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle D^k T, g\rangle = (-1)^{|k|}\langle T, D^k g\rangle, T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)', g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

ein bzgl. der schwach-$*$-Topologie stetiger linearer Operator D^k auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ definiert wird.

3. Eine Funktion $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ heiße *polynomial beschränkt*, wenn g in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ liegt und wenn es für alle $k \in \mathbb{N}_0^d$ eine Konstante $C_k > 0$ und ein $n_k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|D^k f(x)| \leq C_k\,(1 + |x|)^{n_k}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt.
Zeigen Sie, dass für polynomial beschränktes g gilt:
(a) Durch

$$f \mapsto gf$$

wird ein stetiger linearer Operator auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ definiert.
(b) Durch

$$\langle gT, f\rangle = \langle T, gf\rangle, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

wird ein bzgl. (der schwach-$*$-Topologie) stetiger linearer Operator

$$T \mapsto gT$$

auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ definiert.

4. Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}_0^d$ und $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ die temperierten Distributionen $x^k T$ und $x^k \hat{T}$ den Gleichungen

$$\begin{aligned} \widehat{x^k T} &= \mathrm{i}^{|k|} D^k \hat{T}, \\ x^k \hat{T} &= (-\mathrm{i})^{|k|} \widehat{D^k T} \end{aligned}$$

genügen.

5. Wir versehen wie üblich den Vektorraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit der durch die Halbnormen $p_{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}_0^d$, gegebenen lokalkonvexen Topologie. Auf dem Dualraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ betrachten wir die schwach-$*$-Topologie.
Zeigen Sie:
(a) $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ liegt dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
(b) Für jedes $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ gibt es eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, die (als Folge temperierter Distributionen) gegen T konvergiert.