Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
Blatt 10

SoSe 2017

(Abgabe 22.6.2017 in der Vorlesung)

1. *(4 Punkte)*
Zegen Sie für $A, B \in \mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ mit $AB = BA$:
(a) e^A ist invertierbar und

$$\left(\mathrm{e}^A\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}.$$

(b)

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \,\mathrm{e}^B$$

(c)

$$\mathrm{e}^{(s+t)A} = \mathrm{e}^{sA} \,\mathrm{e}^{tA}$$

für alle $s, t \in \mathbb{K}$.
(d)

$$A = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{1}{t}\left(\mathrm{e}^{tA} - E_n\right)$$

2. *(4 Punkte)*
Es sei $Q = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ eine Matrix in $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$, so dass e^{tQ} stochastisch sind für alle $t \in \mathbb{R}_+$.
Zeigen Sie, dass dann Q eine Q-Matrix ist, d. h.:

$$q_{ij} \geq 0 \text{ für alle } i, j \in \{1, \dots, n\},\ i \neq j$$
$$\sum_{l=1}^{n} q_{il} = 0 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}.$$

(Versuchen Sie, die Umkehrung zu beweisen, d. h. dass e^{tQ}, $t \in \mathbb{R}_+$, stochastisch sind, falls Q eine Q-Matrix ist.)

3. *(4 Punkte)*
Für eine feste Matrix $A \in \mathcal{M}(n; \mathbb{K})$ und einen festen Vektor $b \in \mathbb{K}^n$ betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b.$$

Zeigen Sie: Es ist

$$Y = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}$$

ein affiner Unterraum des affinen Raumes $\mathbb{K}^n$. Wenn das obige Gleichungssystem eine Lösung besitzt, dann ist die Dimension von Y gleich $n - r$, wobei r den Rang der Matrix A bezeichnet.

4. *(4 Punkte)*
Sei $(X, \mathcal{V}_X, \rho)$ ein affiner Raum. Zeigen Sie:
(a) Zu jeder Abbildung $f : X \to X$ und jedem Punkt p in X gibt es genau eine Abbildung $f_p : \mathcal{V}_X \to \mathcal{V}_X$ mit $f_p(\rho(p,q)) = \rho(f(p), f(q))$.
(b) Wenn es für die Abbildung $f : X \to X$ ein $p \in X$ gibt, so dass f_p linear ist, dann folgt $f_p = f_q$ für alle $q \in X$.
(c) Es seien p, q zwei Punkte in X. Zu jeder linearen Abbildung $\varphi : \mathcal{V}_X \to \mathcal{V}_X$ gibt es genau eine Abbildung $f : X \to X$ mit $f_p = \varphi$ und $f(p) = q$.