

Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Blatt 12

SoSe 2017

(Abgabe 6.7.2017 in der Vorlesung)

1. (4 Punkte)

Sei Q eine Quadrik im $\mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie: Für jede Affinität (d. h. bijektive affine Abbildung) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist

$$f(Q) = \{f(x) \mid x \in Q\}$$

wieder eine Quadrik.

2. (4 Punkte)

Gegeben sei die Quadrik

$$Q(x) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid p(x) = 0\},$$

wobei

$$p(x) = 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 2.$$

(a) Schreiben Sie Q in der Form

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, Ax \rangle = -1\}$$

für eine geeignete Matrix $A \in M(3, \mathbb{R})$.

(b) Finden Sie die Normalform von Q .

3. (4 Punkte)

Gegeben sei die Quadrik

$$Q_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - 2x_2^2 + \alpha x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{5}x_1 + 4\sqrt{5}x_2 + \alpha = 0\}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Schreiben Sie Q_α in der Form

$$Q_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c = 0\}.$$

(b) Bestimmen Sie die Normalform von Q_α in Abhängigkeit von α .

4. (4 Punkte)

Gegeben sei die Quadrik

$$Q_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1x_2 - \alpha x_3^2 + 2(\alpha - 1)x_3 = 0\}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Normalform von Q_α .

(b) Zeigen Sie, dass für einen Punkt $y \in \mathbb{R}^3$ genau eine der folgenden Aussagen zutrifft:

- (i) y liegt auf allen Q_α .
- (ii) y liegt auf keinem Q_α .
- (iii) y liegt auf genau einem Q_α .