Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
Blatt 2
SoSe 2017
(Abgabe 20.4.2017 in der Vorlesung)

1. *(4 Punkte)*
Sei $\mathcal{V}$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine lineare Abbildung. Wir bezeichnen mit f^* die Adjungierte von f, d. h. die lineare Abbildung $f^* : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ mit $\langle v, f(w)\rangle = \langle f^*(v), w\rangle$, $v, w \in \mathcal{V}$. Zeigen Sie, dass gilt:
(a) $\operatorname{kern} f^* = (\operatorname{bild} f)^\perp$
(b) $\operatorname{bild} f^* = (\operatorname{kern} f)^\perp$

2. *(4 Punkte)*
Sei $\mathcal{V}$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie , dass für eine lineare Abbildung $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ mit $f \circ f = f$ die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist symmetrisch, d. h. $\langle v, f(w)\rangle = \langle f(v), w\rangle$ für alle $v, w \in \mathcal{V}$.

(ii) $\operatorname{kern} f$ und $\operatorname{bild} f$ sind orthogonal.

3. *(4 Punkte)*
Es sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis des n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes $\mathcal{V}$. Für zwei lineare Abbildungen φ und ψ von $\mathcal{V}$ nach $\mathbb{R}$ setzen wir:

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i)\psi(v_i).$$

Beweisen Sie:

(a) Die Zahl $\langle \varphi, \psi \rangle$ hängt nicht von der Wahl der Orthonormalbasis ab.
(b) $(\mathcal{V}', \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein euklidischer Vektorraum, wobei

$$\mathcal{V}' := \{\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ linear}\}.$$

(c) Es gilt

$$\langle \varphi_v, \varphi_w \rangle = \langle v, w \rangle$$

für alle $v, w \in \mathcal{V}$ (wobei φ_u, $u \in \mathcal{V}$, das lineare Funktional auf $\mathcal{V}$ bezeichnet mit $\varphi_u(v) = \langle u, v \rangle$).

4. *(4 Punkte)*
(a) Die Vektoren

$$v = (1, 2, -2), \ w = (4, 0, 3)$$

des $\mathbb{R}^3$ spannen ein Parallelogramm auf. Unter welchem Winkel schneiden sich die Diagonalen des Parallelogramms?
(b) Beweisen Sie, dass die Vektoren

$$v = (2, -14, 5), \ w = (11, -2, -10), \ u = (-10, -5, -10)$$

des $\mathbb{R}^3$ einen Würfel aufspannen. Unter welchem Winkel schneiden sich die Raumdiagonalen dieses Würfels?