Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
Blatt 3

SoSe 2017

(Abgabe 27.4.2017 in der Vorlesung)

1. *(4 Punkte)*
(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{U} = \{(0, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \mid x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^4$ ist.
(b) Geben Sie eine Orthonormalbasis von $\mathcal{U}$ und von seinem Lotraum $\mathcal{U}^\perp$ an.
(c) Geben Sie die Koordinaten des Vektors $(1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ bzgl. der aus den Orthonormalbasen für $\mathcal{U}$ und für $\mathcal{U}^\perp$ gebildeten Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ an.

2. *(4 Punkte)*
Auf einem 3-dimensionalen komplexen Vektorraum mit der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ wird ein Endomorphismus f durch

$$\begin{aligned} fv_1 &= v_1 + v_2 + v_3 \\ fv_2 &= v_1 - v_2 + v_3 \\ fv_3 &= v_1 \end{aligned}$$

definiert.
(a) Berechnen Sie die Determinante und die Spur von f.
(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von f. Ist f diagonalisierbar?

3. *(4 Punkte)*
Sei $\mathcal{V}$ ein euklidischer Vektorraum und $v_1, \ldots, v_r$, $r \in \mathbb{N}$, orthonormale Vektoren in $\mathcal{V}$, d. h. $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ für $i, j \in \{1, \ldots, r\}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
(i) $\{v_1 \ldots, v_r\}$ ist eine Basis von $\mathcal{V}$.
(ii) Für $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\langle v, v_i \rangle = 0$ für $i = 1, \ldots, r \Rightarrow v = 0$.
(iii) Für alle $v \in \mathcal{V}$ gilt: $v = \sum_{i=1}^{r} \langle v_i, v \rangle v_i$.

(iv) Für $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i\rangle\langle v_i, w\rangle$ für alle $w \in \mathcal{V}$.
(v) Für alle $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{r} |\langle v, v_i\rangle|^2$

4. *(4 Punkte)*
Richtig oder falsch?
(a) Jede orthogonale Matrix ist orthogonal diagonalisierbar.
(b) Eine reelle Matrix ist genau dann orthogonal diagonalisierbar (über $\mathbb{R}$), wenn sie symmetrisch ist.
(c) Jede reelle normale Matzrix ist symmetrisch.
(d) Jede unitäre Matrix ist normal.
(e) Jede normale Matrix ist unitär.
(f) Eine komplexe Matrix ist genau dann orthogonal diagonalisierbar, wenn sie normal ist.
Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!