Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
Blatt 4
SoSe 2017
(Abgabe 4.5.2017 in der Vorlesung)

1. *(4 Punkte)*
Geben Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen einer 4×4-Matrix an, wenn angenommen wird, dass die Matrix nur den Eigenwert 2 besitzt. Nennen Sie für jede Möglichkeit die Dimension des Eigenraumes.

2. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie das Minimalpolynom der folgenden Matrizen (siehe Beispiele Ende des 1. Semesters):

$$\textbf{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \textbf{(b)} \begin{pmatrix} 9 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -5 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie das Minimalpolynom einer schiefsymmetrischen 3×3-Matrix. Dabei heißt eine Matrix $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ schiefsymmetrisch, wenn gilt $A^{\mathrm{T}} = -A$.

4. *(4 Punkte)*
Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne L_n die Matrix aus $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ mit

$$(L_n)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \geq j \text{ und } i \leq j-2 \\ 1 & \text{für } i = j-1. \end{cases}$$

Weiterhin sei $\mathcal{A}$ die Menge aller Matrizen $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, für die Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ existieren, so dass

$$\begin{aligned} & a_{ij} = 0 \text{ für } i > j \\ & a_{i,i} = a_1, \ldots, a_{i,n} = a_{n+1-i} \text{ für } i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Zeigen Sie
(a) $\mathbb{K}[L_n] = \mathcal{A}$
(b) Für je zwei Matrizen $A, B \in \mathcal{A}$ gilt: $AB = BA$.