Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
Blatt 5
SoSe 2017
(Abgabe 11.5.2017 in der Vorlesung)

Der Satz 5.1 aus dem Wintersemester über die Jordansche Normalform und die Berechnung der Jordanschen Normalform, die wir ebenfalls am Ende des letzten Semesters besprochen haben, sollen verwendet werden.

1. *(4 Punkte)*
Geben Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

an.

2. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der folgenden Matrix A:

$$(\mathbf{a})\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{b})\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{c})\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{d})\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *(4 Punkte)*
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, und $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$, $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \neq 0$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und die Dimensionen der zugehörigen Eigenräume.
(b) Besitzt A eine Jordansche Normalform als Matrix aus $\mathcal{M}(4, \mathbb{R})$?
(c) Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von A durch $\mu_A = x(x^2 - c)$ mit $c = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ gegeben ist.

4. *(4 Punkte)*
Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 \end{pmatrix}$$

mit $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$.
(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.
Wann besitzt A über $\mathbb{R}$ eine Jordansche Normalform?
Entscheiden Sie in den fogenden Fällen (b)–(e) jeweils, ob A eine Jordansche Normalform über $\mathbb{R}$ besitzt. Ist dies der Fall, so geben Sie die Jordansche Normalform von A an.
(b) $a_1 = 1$; $a_2 = a_3 = a_4 = 0$
(c) $a_2 = 1$; $a_1 = a_3 = a_4 = 0$
(d) $a_3 = 1$; $a_1 = a_2 = a_4 = 0$
(e) $a_4 = 1$; $a_1 = a_2 = a_3 = 0$
(f) Wie lautet in den Fällen (b)–(e) das Minimalpolynom der Matrix A?