Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
Blatt 6
SoSe 2017
(Abgabe 18.5.2017 in der Vorlesung)

1. *(4 Punkte)*
Richtig oder falsch? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!
(a) Jede nilpotente Matrix besitzt eine Jordansche Normalform.
(b) Die Anzahl der Jordan-Kästchen zu einem festen Eigenwert ist gleich der geometrischen Vielfachheit diese Eigenwertes.
(c) Das größte Jordan-Kästchen zu einem festen Eigenwert gibt die algebraische Vielfachheit dieses Eigenwertes an.
(d) Ist eine Matrix diagonalisierbar, so ist die Anzahl der Jordan-Kästchen zu einem festen Eigenwert gleich der algebraischen Vielfachheit dieses Eigenwertes.
(e) Jede komplexe Matrix besitzt eine Jordansche Normalform.
(f) Jede orthogonale Matrix besitzt eine Jordansche Normalform.

2. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie die Jordansche Normalform J und die zugehörige Transformationsmatrix T (so dass $T^{-1}AT = J$) für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. *(4 Punkte)*
(a) Besitzt die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

eine Jordansche Normalform?

(b) Geben Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte, die Jordansche Normalform, die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte sowie das Minimalpolynom der Matrix A an, wenn A als komplexe Matrix aufgefasst wird.

4. *(4 Punkte)*
Für den Endomorphismus f des Vektorraumes $\mathcal{V}$ sei die Jordan-Zerlegung $f = f_1 + f_2$ gegeben.
Zeigen Sie: Ein Endomorphismus g von $\mathcal{V}$ vertauscht genau dann mit f (d.h̃. $f \circ g = g \circ f$), wenn g mit f_1 und mit f_2 vertauscht.