Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
Blatt 8
SoSe 2017
(Abgabe 1.6.2017 in der Vorlesung)

1. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie für die folgende Matrix A eine invertierbare Matrix T, so dass $T^{-1}AT$ Jordansche Normalform hat. Geben Sie die Jordan-Zerlegung von A an.
(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

2. *(4 Punkte)*
Berechnen Sie $\exp A_i$ für die folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_4 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

3. *(4 Punkte)*
Für $A \in \mathcal{M}(n; \mathbb{K})$ definieren wird den Endomorphismus $\operatorname{ad} A$ des $\mathbb{K}$-Vektorraumes $\mathcal{M}(n; \mathbb{K})$ durch

$$(\operatorname{ad} A)(B) = AB - BA;\ B \in \mathcal{M}(n; \mathbb{K});$$

siehe Blatt 7, Aufgabe 3.
Zeigen Sie:
Ist A zerfallend, so auch $\operatorname{ad} A$. Wenn A die Jordan-Zerlegung $A = A_1 + A_2$ besitzt, dann ist durch

$$\operatorname{ad} A = \operatorname{ad} A_1 + \operatorname{ad} A_2$$

die Jordan-Zerlegung von $\operatorname{ad} A$ gegeben.

4. *(4 Punkte)*
Gegeben ist eine diskrete Markov-Kette mit zwei Zuständen und der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie P^{20}.
(b) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty}(P^n)_{21}$.