Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
Blatt 9
SoSe 2017
(Abgabe 15.6.2017 in der Vorlesung)

1. *(4 Punkte)*
Ggeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von den Parametern a und b ein minimales $k \in \mathbb{N}$, so dass $A^k = 0$.
(b) Bestimmen Sie die Räume $B_i = \ker(A^i)$, $i = 1, 2, \ldots$ (z. B. durch Angabe von Basisvektoren).
(c) Berechnen Sie das Matrixexponential e^A für $a = b = 2$.

2. *(4 Punkte)*
Eine endliche Markov-Kette mit stetigem Zeitparameter und den möglichen Zuständen 1, 2 und 3 besitze die Q-Matrix
$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Halbgruppe P_t der Übergangswahrscheinlichkeiten für die Markov-Kette und geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, zum Zeitpunkt $t = 4$ im Zustand 2 zu sein, wenn man sich zum Zeitpunkt $t = 1$ in 3 befindet.
(b) Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} p_{11}(t)$.

3. *(4 Punkte)*
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $x' = Ax$ mit
$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 & -1 & 9 \\ 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Jordansche Normalform J der Matrix A.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen des transformierten Systems $y' = Jy$.
(c) Bestimmen Sie alle Lösungen des ursprünglichen Systems $x' = Ax$.

4. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems $x' = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$