Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Maß- und Integrationstheorie
Blatt 1
WiSe 2017/2018
(Abgabe 26.10.2017 in der Übung)

1. *(4 Punkte)*
Berechnen Sie

$$\textbf{(a)} \bigcup_{n=1}^{\infty}[0,1-\frac{1}{n}] \qquad \textbf{(b)} \bigcap_{n=1}^{\infty}[0,1+\frac{1}{n}[\qquad \textbf{(c)} \bigcap_{n=1}^{\infty}[0,\frac{1}{n}[$$

$$\textbf{(d)} \bigcup_{t\in\mathbb{Q}\cap]0,1[} [0,t[\qquad \textbf{(e)} \bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[\qquad \textbf{(f)} \bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}]$$

2. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie,
(a) dass jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ abzählbare Vereinigung offener Kreisscheiben ist.
(b) dass für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ über $\mathbb{R}^d$, die die "Rechtecke" enthält, auch alle offenen und abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ in $\mathcal{A}$ liegen müssen.

3. *(4 Punkte)*
Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=m}^{\infty}[c_k-\frac{1}{n},c_k+\frac{1}{n}].$$

Zeigen Sie, dass A höchstens einen Punkt enthält, dass (c_n) konvergent ist genau dann, wenn $A \neq \emptyset$, und dass (c_n) gegen $c \in \mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn $A = \{c\}$.

4. *(4 Punkte)*
(a) Beschreiben Sie für $n \in \mathbb{N}$ die σ-Algebra $\mathcal{A}_n$ über $\mathbb{N}$, die von den Teilmengen $\{1\}$, $\{2\}$, …, $\{n\}$ erzeugt wird.
(b) Zeigen Sie: $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_m$ für $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$.
(c) Ist $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n$ eine σ-Algebra über $\mathbb{N}$?