

Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Maß- und Integrationstheorie
Blatt 10

WiSe 2017/2018

(Abgabe 11.01.2018 in der Übung)

1. (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Kennzeichnen Sie diejenigen messbaren numerischen Funktionen f mit den Eigenschaften:

f ist μ -integrierbar

f nimmt nur endlich viele Werte (in $\overline{\mathbb{R}}_+$) an

2. (4 Punkte)

Auf dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ sei eine Folge $A_1, A_2, \dots$ paarweise disjunkter messbarer Mengen gegeben mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$.

Zeigen Sie:

Eine Funktion f ist genau dann μ -integrierbar, wenn die Funktionen

$$f_n := f \cdot 1_{A_n}, n \in \mathbb{N},$$

μ -integrierbar sind und gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty.$$

3. (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, n \in \mathbb{N}$, eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen, so dass eine Funktion $g \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ existiert mit $f_n \leq g \forall n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie:

$$\int (\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

4. (4 Punkte)

Für eine Menge $\Omega \neq \emptyset$ sei $\mathbf{F}$ eine nichtleere Teilmenge der Menge

$$\{f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f(\omega) \geq 0 \forall \omega \in \Omega\}$$

der nichtnegativen numerischen Funktionen auf Ω . Es gelte

$$f, g \in \mathbf{F}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f + \beta g \geq 0 \implies \alpha f + \beta g \in \mathbf{F}.$$

Die Abbildung $I : \mathbf{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ sei nicht konstant gleich ∞ und besitze die folgenden beiden Eigenschaften (1) und (2):

$$I(f + g) = I(f) + I(g) \quad \forall f, g \in \mathbf{F} \quad (1)$$

$$f_n, f \in \mathbf{F}, f_n \uparrow f \text{ for } n \rightarrow \infty \implies I(f_n) \rightarrow I(f) \text{ for } n \rightarrow \infty \quad (2)$$

Zeigen Sie:

Dann erfüllt I auch die beiden folgenden Bedingungen (3) und (4):

$$f, g \in \mathbf{F}, f \leq g \implies I(f) \leq I(g) \quad (3)$$

$$I(\lambda f) = \lambda I(f) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, f \in \mathbf{F} \quad (4)$$