Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Maß- und Integrationstheorie
Blatt 11
WiSe 2017/2018
(Abgabe 18.01.2018 in der Übung)

1. *(4 Punkte)*
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Außerdem gelte

$$\mu(f \neq 0) < \infty.$$

Zeigen Sie, dass dann f μ-integrierbar ist.

2. *(4 Punkte)*
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum mit endlichem Maß μ. Es sei f_n eine Folge in

$$\overline{\mathbf{F}} = \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ messbar}\}$$

mit

$$\lim f_n = f \text{ f.ü.}$$

Weiterhin seien die Funktionen beschränkt (d. h. es gebe eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $|f_n(\omega)| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall \omega \in \Omega$).
Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu$$

3. *(4 Punkte)*
Für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ heißt eine Funktion $f \in \overline{\mathbf{F}}$ *quasi-integrierbar*, wenn gilt:

$$\int f_+ \,\mathrm{d}\mu < \infty \text{ oder } \int f_- \,\mathrm{d}\mu < \infty;$$

siehe Vorlesung.
Zeigen Sie:

$$f \in \overline{\mathbf{F}}, g \in \mathrm{L}^1(\mu), f \geq g \implies f \text{ quasi-integrierbar}$$

und

$$f \in \overline{\mathbf{F}}, g \in \mathrm{L}^1(\mu), f \leq g \implies f \text{ quasi-integrierbar}.$$

4. *(4 Punkte)*
Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$, so dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $\int |t|^k \,\mathrm{d}\mu(t) < \infty$.
Zeigen sie, dass die Fourier-Transformierte $\hat{\mu}$ dann k-mal stetig differenzierbar ist mit

$$\hat{\mu}^{(k)}(t) = \mathrm{i}^k \int s^k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ts} \,\mathrm{d}\mu(s).$$