

Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Maß- und Integrationstheorie
Blatt 12

WiSe 2017/2018

(Abgabe 25.01.2018 in der Übung)

1. (4 Punkte)

Für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ bezeichne $L^p = L^p(\mu)$, $p \in \mathbb{R}_+$, den Raum der messbaren Funktionen mit $\|f\|_p < \infty$.

Zeigen Sie: Wenn μ endlich ist, dann gilt:

$$p_1 \leq p_2 \Rightarrow L^{p_1} \supset L^{p_2}$$

2. (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum.

Beweisen Sie die verallgemeinerte Höldersche Ungleichung:

Für $t, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}_+^*$ mit

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{t}$$

und $f_1, \dots, f_n \in \overline{\mathbf{F}}(\Omega, \mathcal{F})$ gilt:

$$\|f_1 \cdots f_n\|_t \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}$$

3. (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und es seien $f, g \in \overline{\mathbf{F}}_+(\Omega, \mathcal{F})$ mit $f \cdot g \geq 1$.

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\left(\int f d\mu \right) \cdot \left(\int g d\mu \right) \geq 1$$

4. (4 Punkte)

Beweisen Sie:

Für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ und $f \in \overline{\mathbf{F}}(\Omega, \mathcal{F})$ mit

$$\|f\|_\infty < \infty$$

gilt:

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$$