Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Maß- und Integrationstheorie
Blatt 2
WiSe 2017/2018
(Abgabe 2.11.2017 in der Übung)

1. *(4 Punkte)*
Auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ seien die messbaren numerischen Funktionen

$$f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$$

gegeben.
Zeigen Sie:
(a) Falls $f + g$ punktweise definiert ist (d. h. die Fälle "$(+\infty) + (-\infty)$" und "$(-\infty) + (+\infty)$" treten nicht auf): $f + g$ ist eine messbare numerische Funktion.
(b) $f \cdot g$ ist eine messbare numerische Funktion.
(c) Die Mengen $\{f < g\}$ und $\{f = g\}$ sind messbar.

2. *(4 Punkte)*
Sei $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$.
Zeigen Sie, dass die Menge aller $\omega \in \Omega$, für die die Folge $f_n(\omega)$ konvergiert, messbar ist.

3. *(4 Punkte)*
Gegeben sei eine überabzählbare Menge Ω. Sei $\mathcal{A}$ das System aller $A \subset \Omega$, so dass entweder A oder A^c abzählbar ist.
Des Weiteren bezeichne $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ die Abbildung mit $\mu(A) = 0$, falls A abzählbar, und $\mu(A) = 1$, falls A überabzählbar.
Zeigen Sie:
(a) $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra über Ω.
(b) μ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

4. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass es keine σ-Algebra mit <u>abzählbar unendlich</u> vielen Elementen gibt.