

Prof. Dr. Michael Schürmann

**Übungen Maß- und Integrationstheorie
Blatt 3**

WiSe 2017/2018

(Abgabe 9.11.2017 in der Übung)

1. (4 Punkte)

Für eine Menge $\Omega \neq \emptyset$ definieren wir auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ eine “Addition” durch

$$A + B := A \triangle B (= (A \setminus B) \cup (B \setminus A))$$

und eine “Multiplikation” durch

$$A \cdot B := A \cap B,$$

$A, B \subset \Omega$.

(a) Zeigen Sie das $(\mathcal{P}(\Omega), +, \cdot)$ ein kommutativer Ring im Sinne der Algebra ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathcal{R}$ ist ein Ring über Ω im Sinne der Maßtheorie.

(ii) $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ ist ein Unterring von $(\mathcal{P}(\Omega), +, \cdot)$ im Sinne der Algebra.

(iii) $\emptyset \in \mathcal{R}$ und für alle $A, B \in \mathcal{R}$ gilt $A + B \in \mathcal{R}$, $A \cup B \in \mathcal{R}$.

2. (4 Punkte)

(a) Wie kann man für eine Menge $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ den von $\mathcal{M}$ erzeugten Ring über Ω definieren?

(b) Setze für $\mathcal{M}(\Omega)$ ($n \in \mathbb{N}_0$)

$$\mathcal{M}_0 := \mathcal{M} \cup \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{M}_n := \{A \setminus B, A \cup B \mid A, B \in \mathcal{M}_{n-1}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n$ gleich dem von $\mathcal{M}$ erzeugten Ring ist.

3. (4 Punkte)

(a) Seien $\mathcal{E}, \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge. Es gelte $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$. Außerdem sei jedes Element von $\mathcal{E}$ abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{F}$.

Zeigen Sie, dass dann $\sigma_{\Omega}(\mathcal{E}) = \sigma_{\Omega}(\mathcal{F})$ sein muss.

(b) Gegeben seien eine Menge $\Omega \neq \emptyset$ und eine Folge $A_1, A_2, \dots$ von Teilmengen von Ω mit

$$k, l \in \mathbb{N}, k \neq l \implies A_k \cap A_l = \emptyset$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega.$$

Beschreiben Sie die σ -Algebra

$$\sigma_{\Omega}(\{A_1, A_2, \dots\}).$$

4. (4 Punkte)

Sei $\mathcal{F}$ eine σ -Algebra über der Menge $\Omega \neq \emptyset$ und sei M eine Teilmenge von Ω .

Zeigen Sie:

$$\sigma_{\Omega}(\mathcal{F} \cup \{M\}) = \{(A \cap M) \cup (B \cap M^c) \mid A, B \in \mathcal{F}\}.$$