Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Maß- und Integrationstheorie
Blatt 5
WiSe 2017/2018
(Abgabe 23.11.2017 in der Übung)

1. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ genau dann eine im Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetige Verteilungsfunktion besitzt, wenn $\mu(\{a\}) = 0$ gilt.

2. *(4 Punkte)*
Für eine Menge $\Omega \neq \emptyset$ heißt $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *Halbring* über Ω, wenn gilt:

$$\emptyset \in \mathcal{H},$$
$$\mathcal{H} \text{ ist } \cap\text{-stabil}$$

und

$$A, B \in \mathcal{H} \implies$$
$$\exists\, n \in \mathbb{N} \text{ und } A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H} \text{ p.w. d. mit } A \setminus B = \bigcup_{l=1}^{n} A_l.$$

Sei $\mathcal{H}$ ein Halbring über der Menge Ω.
Zeigen Sie, dass für den von $\mathcal{H}$ erzeugten Ring $\widetilde{\mathcal{H}}$ gilt:

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \{A \subset \Omega \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ und } A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H} \text{ p.w. d., so dass } A = \bigcup_{l=1}^{n} A_l\}.$$

3. *(4 Punkte)*
Eine Abbildung $\mu : \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ auf einem Halbring $\mathcal{H}$ (für die Definition von "Halbring" siehe Aufgabe 2) heißt *Prämaß*, wenn $\mu(\emptyset) = 0$ ist und gilt:

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{H} \text{ p.w. d. mit } \bigcup_{l=1}^{\infty} A_l \in \mathcal{H} \implies$$
$$\mu(\bigcup_{l=1}^{\infty} A_l) = \sum_{l=1}^{\infty} \mu(A_l).$$

Zeigen Sie, dass für ein Prämaß μ auf dem Halbring $\mathcal{H}$ genau eine Fortsetzung zu einem Prämaß auf dem von $\mathcal{H}$ erzeugten Ring existiert.

4. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass sich jedes σ-endliche Maß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ in der Form

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n$$

darstellen lässt, wobei $\mu_1, \mu_2, \ldots$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ sind und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Zahlen aus $\mathbb{R}_+$.