

Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Maß- und Integrationstheorie
Blatt 6

WiSe 2017/2018

(Abgabe 30.11.2017 in der Übung)

1. (4 Punkte)

Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Halbringe über Ω bzw. E .

Zeigen Sie, dass dann

$$\mathcal{H} \star \mathcal{K} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{H}, B \in \mathcal{K}\}$$

ein Halbring über $\Omega \times E$ ist.

2. (4 Punkte)

Gegeben seien zwei messbare Räume $(\Omega, \mathcal{F})$ und $(E, \mathcal{E})$ sowie Erzeugendensysteme $\mathcal{M}$ und $\mathcal{L}$ von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{E}$, d. h. $\sigma_{\Omega}(\mathcal{M}) = \mathcal{F}$ und $\sigma_E(\mathcal{L}) = \mathcal{E}$.

Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{M} \star \mathcal{L} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{L}\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}$ ist, d. h. dass gilt

$$\sigma_{\Omega \times E}(\mathcal{M} \star \mathcal{L}) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{E}.$$

3. (4 Punkte)

Für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ definieren wir das Mengensystem $\mathcal{R}$ durch

$$\mathcal{R} := \{A \in \mathcal{F} \mid \mu(A) < \infty\}$$

und bezeichnen mit $\mu_0 : \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ die Einschränkung von μ auf $\mathcal{R}$.

Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{R}$ ist ein Ring über Ω .

(b) Wenn es eine Folge $A_1, A_2, \dots$ von Mengen aus $\mathcal{R}$ gibt mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$, dann ist μ die einzige Fortsetzung von μ_0 zu einem Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$.

4. (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Elementarfunktion (d. h. f messbar, und f nimmt nur endlich viele Werte an). Seien

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$$

die Werte von f . Setze noch $\alpha_0 = 0$.

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(f = \alpha_k) = \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \mu(f \geq \alpha_k).$$