Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Maß- und Integrationstheorie
Blatt 7
WiSe 2017/2018
(Abgabe 07.12.2017 in der Übung)

1. *(4 Punkte)*
Wir setzen die Addition und Multiplikation nichtnegativer reeller Zahlen fort auf $\overline{\mathbb{R}}_+$, indem wir definieren:

$$\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty \text{ für } \alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+$$
$$\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty \text{ für } \alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+, \alpha > 0$$
$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass mit dieser Definition die *Kommutativ-*, *Assoziativ-* und *Distributivgesetze* in $(\overline{\mathbb{R}}_+, +, \cdot)$ gelten.
(b) Zeigen Sie, dass für zwei monoton wachsende Folgen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots$ in $\overline{\mathbb{R}}_+$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta \text{ mit } \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}_+ \implies \lim_{n\to\infty} \alpha_n\beta_n = \alpha\beta$$

2. *(4 Punkte)*
Eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Verteilungsfunktion*, wenn sie die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

$$F \text{ ist monoton wachsend} \tag{1}$$
$$F \text{ ist in jedem Punkt rechtsseitig stetig} \tag{2}$$
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1 \text{ und } \lim_{t\to-\infty} F(t) = 0 \tag{3}$$

Zeigen Sie:
(a) Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist durch

$$F_\mu(t) := \mu(]-\infty, t]), t \in \mathbb{R},$$

eine Verteilungsfunktion gegeben (*die Verteilungsfunktion von* μ).
(b) Für jede Verteilungsfunktion F existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_F auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, so dass $F(t) = \mu_F(]-\infty, t])$, $t \in \mathbb{R}$, gilt.

3. *(4 Punkte)*
Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum. Eine Teilmenge A von Ω heißt *Atom* von $(\Omega, \mathcal{F})$, wenn gilt: $A \in \mathcal{F}$, $A \neq \emptyset$ und

$$B \in \mathcal{F}, B \subset A \implies B = \emptyset \text{ oder } B = A.$$

(a) Zeigen Sie, dass zwei Atome von $(\Omega, \mathcal{F})$ entweder gleich oder disjunkt sind.
(b) Geben Sie die Atome von $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und von $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$ mit

$$\mathcal{F} = \{\emptyset,]-\infty, 0],]0, +\infty[, \mathbb{R}\}$$

an.

4. *(4 Punkte)*
Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum mit <u>endlichem</u> $\mathcal{F}$.
Zeigen Sie:
(a) Jedes Element ω von Ω liegt in genau einem Atom A_ω von $(\Omega, \mathcal{F})$.
(b) Für alle $B \in \mathcal{F}$ gilt:

$$B = \bigcup_{\omega \in B} A_\omega$$