Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Maß- und Integrationstheorie
Blatt 8
WiSe 2017/2018
(Abgabe 14.12.2017 in der Übung)

1. *(4 Punkte)*
Richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.
(a) Sei $\mathcal{R}$ ein Ring über der Menge Ω. Dann ist $\mathcal{R}$ genau dann eine Algebra über Ω, wenn Ω ein Element von $\mathcal{R}$ ist.
(b) Sei $\mathcal{R}$ ein Ring über der Menge Ω. Dann ist $\mathcal{R}$ genau dann eine Algebra über Ω, wenn $\mathcal{R}$ $\cap$-stabil ist.
(c) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum.
Dann gilt für eine Folge $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$:

$$\mu(A_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = 0.$$

(d) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.
Dann gilt für eine Folge $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$:

$$\mathrm{P}(A_n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \mathrm{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = 1.$$

2. *(4 Punkte)*
Für eine Menge $\Omega \neq \emptyset$ nennen wir ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein σ-System über Ω, wenn es eine Folge $A_1, A_2, \ldots$ von Mengen aus $\mathcal{M}$ gibt mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$.
Achtung: Die Behauptung aus Aufgabe 2, Blatt 6, ist falsch!
Beweisen Sie nun stattdessen:
Gegeben seien zwei messbare Räume $(\Omega, \mathcal{F})$ und $(E, \mathcal{E})$ sowie Erzeugendensysteme $\mathcal{M}$ und $\mathcal{L}$ von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{E}$, d. h. $\sigma_\Omega(\mathcal{M}) = \mathcal{F}$ und $\sigma_E(\mathcal{L}) = \mathcal{E}$. Außerdem sei $\mathcal{M}$ ein σ-System über Ω und $\mathcal{L}$ ein σ-System über E.
Dann ist $\mathcal{M} \star \mathcal{L} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{L}\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}$, d. h. es gilt

$$\sigma_{\Omega \times E}(\mathcal{M} \star \mathcal{L}) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{E}.$$

3. *(4 Punkte)*
Gegeben seien zwei Maßräume $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ und $(E, \mathcal{E}, \nu)$ mit *endlichem* $\mathcal{F}$ und *endlichem* $\mathcal{E}$.
Zeigen Sie:
(a) $\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}$ ist ebenfalls endlich.
(b) Es gibt ein *eindeutiges* Produktmaß $\mu \otimes \nu$, d. h. ein eindeutiges Maß $\mu \otimes \nu$ auf $(\Omega \times E, \mathcal{F} \otimes \mathcal{E})$ mit

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\, \nu(B)$$

für alle $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{E}$.

4. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass jede monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar ist bzgl. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.