Prof. Dr. Michael Schürmann

Übungen Maß- und Integrationstheorie
Blatt 9
WiSe 2017/2018
(Abgabe 04.01.2018 in der Übung)

1. *(4 Punkte)*
Für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, einen messbaren Raum $(E, \mathcal{E})$ und eine messbare Abbildung $f : \Omega \to E$, definieren wir das *Bildmaß*

$$f(\mu) : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

(von μ unter f) durch

$$f(\mu)(A) = \mu(f \in A), \ \ A \in \mathcal{E}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\big(E, \mathcal{E}, f(\mu)\big)$ ein Maßraum ist.
(b) Sei $(D, \mathcal{D})$ ein weiterer messbarer Raum und $g : E \to D$ eine messbare Abbildung: Zeigen Sie, dass

$$(g \circ f)(\mu) = g\big(f(\mu)\big)$$

gilt.

2. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie: Zu jeder linearen Abbildung $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ gibt es eine reelle Zahl $\Delta(T)$ mit

$$\lambda^d\big(T(B)\big) = \Delta(T)\,\lambda^d(B) \ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

(Dabei bezeichnet λ^d das Lebesgue-Borelsche Maß auf $\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$.)

3. *(4 Punkte)*
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen auf dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mit $f_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eine messbare numerische Funktion auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ist und dass gilt:

$$\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

4. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie mit Hilfe des Resultats aus Aufgabe 3:
Für eine Doppelfolge $(a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_+$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}$$