# Übungen Wahrscheinlichkeitstheorie
## Blatt 10

WS 2017/2018

Abgabe: Übung am 22.01.2018

**1.** (4 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal mit $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

(i) $\mathbb{E}\big((X_k - X_{k-1})(X_j - X_{j-1})\big) = 0$ für $j \neq k$, d.h. die Zuwächse sind unkorreliert.

(ii) Mit $X_0 = 0$ gilt $\mathbb{E}(X_n^2) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\big((X_k - X_{k-1})^2\big)$

**2.** (4 Punkte)
Seien $X_1, X_2, \cdots$ Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_i) = 0$ und $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei $S_n \coloneqq \sum_{i=1}^n X_i$, sowie $Z_n \coloneqq S_n^2 - n\sigma^2$. Zeigen Sie, dass $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal ist.

**3.** (4 Punkte)

(a) Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Submartingale. Zeigen Sie, dass dann durch $Z_n \coloneqq \max\{X_n, Y_n\}$ ebenfalls ein Submartingal gegeben ist.

(b) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal und sei $k_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge natürlicher Zahlen mit $k_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Es gelte

$$\mathbb{E}(X_{k_n}) \leq \mathbb{E}(X_0) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Zeigen Sie, dass $X_n$ ein Martingal ist.

**4.** (4 Punkte)
Sei $(N(t))_{t\in[0,\infty)}$ ein Poisson-Prozess mit Parameter $\lambda > 0$ und $Z(t) \coloneqq N(t)^2$. Zeigen Sie, dass $(Z(t))_{t\in[0,\infty)}$ ein Submartingal ist.