Übungen Wahrscheinlichkeitstheorie
Blatt 4
WS 2017/2018
Abgabe: Übung am 27.11.2017

1. (4 Punkte) Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{1, \cdots, k\}$, wobei k eine Primzahl ist und $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ durch $P(A) = \frac{|A|}{k}$ definiert ist.

(a) Zeigen Sie, dass P ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert.

(b) Seien A und B unabhängige Ereignisse. Zeigen Sie, dass dann $A \in \{\emptyset, \Omega\}$ oder $B \in \{\emptyset, \Omega\}$ gilt.

2. (4 Punkte) Wir würfeln einen fairen Würfel n mal. A_{ij} bezeichne das Ereignis, bei dem im i-ten und im j-ten Wurf das selbe Ergebnis gewürfelt wird.

(a) Berechnen Sie $P(A_{ij})$.

(b) Zeigen Sie, dass die Ereignisse A_{ij} für $1 \leq i < j \leq n$ paarweise unabhängig sind.

(c) Ist die Familie $(A_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ unabhängig?

3. (4 Punkte) Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 > 0$. Definiere die standardisierte Zufallsvariable $\widetilde{X}$ durch

$$\widetilde{X} \coloneqq \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Berechnen Sie $\mathbb{E}(\widetilde{X})$ und $\mathbb{V}(\widetilde{X})$.

4. (4 Punkte) Eine gezinkte Münze (die Wahrscheinlichkeit für "Kopf" sei $p \in]0,1[$) werde "unendlich oft" geworfen. Die Zufallsvariable X_n gebe das Ergebnis des n-ten Wurfes an:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls beim } n\text{-ten Wurf Kopf kommt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$P(30 \leq X_1 + \ldots X_n \leq 100)$$

approximativ in Abhängigkeit von p.

(b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$$

gleichmäßig in $\alpha \in \mathbb{R}$.