

Übungen Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 5

WS 2017/2018

Abgabe: Übung am 04.12.2017

1. (4 Punkte) Zeigen sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ das k -te Moment der Exponentialverteilung durch

$$m_k(E_\lambda) = \frac{k!}{\lambda^k}$$

gegeben ist.

2. (4 Punkte) Sei d die Metrik der stochastischen Konvergenz, d.h.

$$d(X, Y) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid P(|X - Y| > \varepsilon) \leq \varepsilon\}.$$

Existiert eine Norm $\|\cdot\|$ auf L_0 , sodass $d(X, Y) = \|X - Y\|$ für $X, Y \in L_0$ gilt?

3. (4 Punkte) Sei X eine $\mathbb{N}_0$ -wertige Zufallsvariable. Die Abbildung

$$\psi_X: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n)z^n$$

heißt (wahrscheinlichkeits-) erzeugende Funktion der Verteilung P_X oder (kurz) von X .

- (a) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und $\mathbb{N}_0$ -wertig. Zeigen Sie:

$$\psi_{X_1 + \dots + X_n} = \prod_{i=1}^n \psi_{X_i}$$

- (b) Berechnen Sie die erzeugende Funktion der geometrischen Verteilung.

4. (4 Punkte) Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $X_n \geq 0$. Zeigen Sie: Es gilt genau dann

$$P\left(\sum_{n=0}^{\infty} X_n < \infty\right) = 1,$$

wenn es eine in 0 stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{S_n}(t) \rightarrow f(t) \text{ für } n \rightarrow \infty$$

gilt, wobei $S_n = X_1 + \dots + X_n$.