Übungen Wahrscheinlichkeitstheorie
Blatt 6
WS 2017/2018
Abgabe: Übung am 11.12.2017

1. (4 Punkte)
Seien $X_1, X_2, \cdots$ Zufallsvariablen mit $X_i \sim \Pi_{\lambda_i}$, wobei $\lambda_i, \lambda \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq \lambda_i \leq \lambda < \infty$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X_i \geq i$ für unendlich viele $i)$.

2. (4 Punkte)
Es seien unabhängige Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ gegeben mit

$$P(A_n) = \frac{1}{n^\lambda},$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von λ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

3. (4 Punkte)
An einer wöchentlich stattfindenden Lotterie nehmen bei der n-ten Ziehung n^2 Personen teil. Bei jeder Ziehung gewinnt nur eine Person, die Gewinnwahrscheinlichkeit sei dabei für alle gleich groß. Zeigen Sie, dass jeder Spieler nur endlich oft gewinnt.

4. (4 Punkte)
Sei X_n eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$. Setze $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ und $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1)$. Für $n \geq 2$ sei

$$Y_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad Z_n := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - Y_n)^2.$$

Berechnen Sie $\mathbb{E}(Y_n)$ und $\mathbb{E}(Z_n)$.